R

Math. Un
171 f.

Der
Mathematik
Grundbegriffe, wahres Wesen
und
Organismus,

geistesgesetzmäßig entwickelt

von

Christian Lebrecht Rösling,

Doct. Philos. leg., Prof. der Math. und Phys. am königl. Würtemberg. Gymnasium in Ulm und verschiedener gelehrter Gesellschaften Mitglied.

Ulm, 1823.

In der Stettin'schen Buchhandlung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Dem

Hochwohlgeborenen

Freiherrn von Varnbühler,

königlich Würtembergischen

General-Major

und

General-Quartier-Meister,

Großkreuz des Civil-Verdienst-Ordens wie auch
Innhaber mehrerer Militär-Orden etc. etc.

widmet,

als hohem Verehrer und Beförderer der Wissenschaften
und militärischen Bildungsanstalten,

dieses Werk

hochachtungsvoll

der Verfasser

Vorrede.

Solche Mathematiker, die nicht blos mit der Erkenntniß der Materie ihrer Wissenschaft und mit einer gewissen erlangten Fertigkeit in der Ausübung mathematischer Operationen zufrieden sind, die sich nicht blos im Luxus des mathematischen Calcüls oder im Kreise geometrischer Analysen und Constructionen herum treiben, um den Körper der Wissenschaft noch stets fort stärker und fetter werden zu lassen, sondern die von ächtem wissenschaftlichen Geiste

durchdrungen und belebt auch über die Form ihrer Wissenschaft ernstlich und gründlich nachgedacht und sich auf diesem Wege zu einem umfassenden und gehörig in die Tiefe greifenden Urtheile über diese erhoben haben, müßen und werden ganz unumwunden eingestehen, daß man, wenn man den Zustand unserer mathematischen Lehrbücher einer kritischen Betrachtung unterwerfen und ohne alle Befangenheit urtheilen wolle, geistesgesetzmäßig zu erklären habe, es sey bis iezt noch keineswegs zu einer ganz vollendeten Läuterung und völlig präcisen Feststellung der Grundbegriffe der Mathematik, zur vollständigen Darstellung ihres eigentlichen und wahren Wesens und zur einzigen und unabänderlichen Organisation ihrer Glieder zu einem feststehenden Ganzen gekommen.

Zugleich werden sie aber dabey auch ohne Weiteres bekennen, daß die Forde-

rung, die Mathematik auf einen solchen Standpunct zu erheben, nicht in den Kreis solcher Aufgaben gehöre, die sich leicht und geschwind lösen lassen. Deswegen bin ich überzeugt, daß Mathematiker von oberwähnter Art, denn blos für solche hab' ich schreiben wollen, gegenwärtiges Product meines Nachdenkens über das, was der Mathematik bisher noch mangelte, gehörig würdigen und dabey nicht in Abrede stellen werden, daß dieses Product nicht blos für Schüler sondern auch für Lehrer in der Mathematik brauchbar und für die Wissenschaft nützlich besonders deswegen sey, weil man sich vielleicht dadurch aufgefordert fühlen möchte, die Mängel, die meinem Producte, welches meine Anlagen bey meinem besten Willen nicht anders, als so, wie es eben geworden ist, aus mir hervorgehen lassen konnten, aufzudecken, zu ersetzen und dadurch die Wissenschaft aufwärts zu fördern gegen den eigentlichen Standpunct hin, welchen ihr die Idee anweist.

Die Druckfehler, die der geneigte Leser nicht auf meine Rechnung bringen wird, sind am Ende des Werkes angegeben.

Der Verfasser.

Erster Abschnitt.

Hauptthätigkeiten

des menschlichen Geistes und deren

Producte, Gesetze, Formen,

die dem Seyn und Wesen der Mathematik und der organischen Eintheilung derselben zum Grunde liegen.

I.

Das Denken der Gegenstände als

Groeßen und Theile

und dessen

Gegensatz und Gesetz.

§ 1.

Die oberste Geistesthätigkeit, von welcher wir hier auszugehen haben, ist diese:

„Wir denken uns Gegenstände, die aus an-
„dern in ihnen vereinigten Gegenständen
„bestehen, und pflegen diese durch mancherley

„Ausdrücke zu bezeichnen, denken uns dem„nach auch Gegenstände, die in einem Ge„genstande enthalten und zu diesem vereinigt „sind."

Hierher gehörende Beispiele sind folgende: Eine Armee, eine Division, ein Regiment, eine Compagnie, ein Zug, eine Reihe, eine Truppe Soldaten, ein Kugelhaufen; eine Thierheerde; tausend Fuße Weges; hundert Quadratruthen Fläche; hundert Cubikfuße Mauer; zwanzig Stunden Zeit, die Gradsumme der Erwärmung oder Beleuchtung eines Zimmers; die Gradsumme der Stärke des Luftdruks auf die Barometersäule; die Pressung eines mehrpfündigen Gewichts gegen eine Fläche ꝛc. ꝛc.

§ 2.

Damit sind folgende Begriffsbestimmungen in Verbindung zu setzen:

1) Diejenige Seynsart (Qualität) eines Gegenstandes, die im Vereinigtseyn desselben aus andern Gegenständen besteht, nennt man das Großseyn (magnum esse) und auch die Groeße (magnitudo) desselben und sagt hiernach von dem Gegenstande, daß er groß sey, daß ihm Größe zukomme.

Nach dieser Begriffsbestimmung ist also jeder Gegenstand groß, es kommt ihm Größe zu, sofern er andere Gegenstände in sich vereinigt enthält.

Aber in der von der Sprache in den Wissenschaften öfters abweichenden im gemeinen Leben üb-

lichen Sprache hat der Ausdruck Großseyn eine engere Bedeutung. Da will man, wenn man von einem Gegenstande ausspricht, daß er groß sey, Folgendes gesagt haben: Der Gegenstand enthalte sehr viele Gegenstände in sich vereinigt, oder, er sey sehr weit räumlich oder zeitlich ausgedehnt, oder, er afficire die Sinne sehr stark, wie es z. E. in folgenden Ausdrücken der Fall ist: Diese Armee, dieser Zug Reiter, dieser Kugelhaufen rc. rc. ist groß; diese Festung, die Dauer dieser Kanonade, der Donner der Kanonen, die Hitze des heutigen Tages, die Last dieses Tornisters ist groß.

2) Jeden Gegenstand, dem die durch das Wort Großseyn oder Groeße bezeichnete Seynsart (Nr. 1) zukommt, der also ein aus andern in sich vereinigten Gegenständen bestehender Gegenstand ist, nennt man in unserer Sprache selbst eine Groeße (id, cui est magnitudo, appellatur magnum).

Es wird demnach das Wort Groeße sowohl für die Seynsart großseyn, als auch für den Gegenstand, dem diese Seynsart zukommt, gebraucht und es ist mithin zweideutig. Man sagt z. B., dieser Kugel kommt Großseyn oder Größe zu, und auch, sie ist eine Größe.

Zur Beseitigung dieser Zweideutigkeit des Wortes Groeße sollte man die Seynsart großseyn durch das Wort Groeße und den Gegenstand, dem diese zukommt, durch das Wort Großes (magnum scil. objectum) bezeichnen.

3) Jeden von solchen Gegenständen, die mit einander in einem Gegenstande vereinigt gedacht werden oder gedacht worden sind, nennt

man einen Theil (pars) des letztern Gegenstandes. Wird dieser als würklich in dem Gegenstande, dem er zugehört, enthalten gedacht, so ist er ein ungetrennter (pars inseparata), wird er aber aus dem Gegenstande, dem er zugehört, ausgehoben gedacht, so nennt man ihn einen getrennten Theil (pars separata).

Weil man die in einem Gegenstande vereinigten Gegenstände Theile des erstern Gegenstandes nennt, so kann man von einer Groeße, oder besser, von einem Großen, folgende Definition geben:

Die Groeße oder das Große ist das, was aus Theilen besteht (partibus constans). — Man pflegt in vielen mathematischen Lehrbüchern zu sagen, eine Groeße sey das, was sich vermehren und vermindern lasse. Sich vermindern lassen und aus Theilen bestehen scheint einerley zu seyn; aber das Bestehen aus Theilen ist die Bedingung der Möglichkeit des Verminderns, ist also primitiv und nicht secundär, woraus erhellt, daß die angegebene Definition einer Groeße eine secundäre Bestimmung statt der eigentlich erforderlichen primitiven enthält und schon in dieser Rücksicht nur von unphilosophischen Köpfen angenommen, keineswegs aber von scharfdenkenden Mathematikern als schulgerecht anerkannt werden kann. Was aber die Vermehrbarkeit betrifft, so ist zu bemerken, daß diese gar nicht als Merkzeichen der Groeßen angenommen werden kann, weil auch das Einfache, was nicht aus Theilen besteht, einer Vermehrung fähig ist. Endlich paßt iene Definition nicht auf die unendlich großen Größen, die unendliche Menge, die unendlich lange Linie und Zeit rc. rc.; diese bestehen doch wahrlich aus Theilen, sind aber keiner Vermehrung fähig.

§ 3.

Der Gegensatz des Denkens der Größe oder des Großen ist das Denken des Einfachen (Simplum), welches kein aus andern Gegenständen vereinigter, kein aus Theilen bestehender Gegenstand ist, und dessen Seynsart die Einfachheit (Simplicitas) heißt.

§ 4.

Das Gesetz, an welches wir uns im Vorstellen und Denken der Gegenstände als Größen gebunden fühlen, ist Folgendes:

„Die ursprüngliche Einrichtung unseres Geistes (indoles humana) fordert, daß wir uns den Raum und die Zeit, jeden darin vorstellbaren Theil und jeden in einem solchen Theile enthaltenen Gegenstand als ein aus Theilen bestehendes Etwas — als eine Größe — vorstellen und denken."

Obgleich dieses Gesetz ein ursprünglich nothwendiges ist, so hat es doch von jeher Philosophen und Mathematiker gegeben, die es nicht durchgängig anerkannt haben. Die sogenannten Corpuscularphilosophen oder Atomisten haben angenommen, man habe sich die den Raum erfüllende Materie nicht als ohne Ende fort theilbar, sondern man habe sich bey dieser zu denken, daß sie aus letzten untheilbaren Theilchen, aus Atomen

bestehe. Verschiedene Mathematiker ferner haben gesetzt, daß selbst auch der Raum und die Zeit aus letzten untheilbaren Theilchen bestehe, die in neueren Zeiten Raumpuncte und Zeitpuncte genannt worden sind.

Wenn erweisbar wäre, daß man geistesgesetzmäßig genöthigt sey, sich den Raum aus letzten untheilbaren Elementen zusammengesetzt zu denken, so wäre hiermit auch gewiß, daß man sich die den Raum erfüllende Materie aus Atomen derselben zusammengesetzt zu denken habe, weil die Materie im Raume unmöglich nach einem andern Gesetze von uns gedacht werden kann, als nach dem, an welches sich unser Geist im Denken des Raumes selbst gebunden fühlt; und ebenso würde die Erweisbarkeit der Zeitpuncte die begränzte Theilbarkeit der Ereignisse in der Zeit begründen.

Es läßt sich aber darthun, daß die Raumpuncte und Zeitpuncte blose Fictionen sind, die nicht geistesgesetzmäßig Statt haben können, und daß eben deswegen auch die Atome der Materie und die einfachen Theile dessen, was in der Zeit abfließt, den Geistesgesetzen widerstreiten und mithin zu verwerfen sind.

Zur Entwickelung dieser bis jetzt noch nicht gehörig aufgeklärten Materie dient folgende Betrachtung:

1) Von Gegenständen, deren wir uns blos durch innere oder äußere unmittelbare

Vorstellung, durch Anschauung derselben, bewußt sind, erzeugen oder construiren wir unsere mittelbaren Vorstellungen oder Begriffe aus den Arten und Weisen, wie wir diese Gegenstände uns vorzustellen genöthigt sind.

Sollen die für solche Gegenstände von uns construirten Begriffe den Gegenständen adäquat und also richtig seyn, so haben wir dabey zu beobachten, daß wir die unveränderlichen Seynsarten (Qualitäten) der Gegenstände, mit welchen wir diese unmittelbar vor uns hinzustellen — sie anzuschauen — genöthiget sind, nicht nur vollständig, sondern auch gerade so, wie wir uns dazu genöthigt fühlen, auffassen und sie unsern Begriffen von ihnen einverleiben. Schon gegen dieses Gesetz der Begriffsbestimmung für Gegenstände, die uns durch innere oder äußere Anschauung gegeben werden, fehlen diejenigen, die behaupten, wir haben uns Raum und Zeit aus einfachen Elementen, aus Raum- und Zeitpuncten, zusammengesetzt zu denken, denn diese stellen von ausgedehnten Größen folgenden Begriff auf:

„Eine ausgedehnte Größe ist a) eine „Mehrheit außer und unmittelbar neben „einander liegender Theile, und zwar b) solcher, die, einzeln genommen, alle „Mehrheit ausschließen, oder kurz, die „einfach sind."

Hierüber ist aber Folgendes zu bemerken:

A) Das Bestehen aus unmittelbar oder ste-

tig außer und neben einander liegenden Theilen ist eine Seynsart der räumlich ausgedehnten Größen, die uns durch das unmittelbare Vorstellen, durch das Anschauen, derselben aufgedrungen wird, denn wir müßen in diesem unserem Vorstellungsacte Theile der ausgedehnten Größe von einer Stelle des Raums bis zur andern, und zwar Theile, die unmittelbar oder stetig untereinander verbunden sind, durchlaufen.

B) Die andere in obiger Begriffsbestimmung angegebene Seynsart aber, daß nämlich die ausgedehnten Größen aus solchen Theilen bestehen, die alle Mehrheit ausschließen, also einfach sind, ist keine unmittelbar durch die Anschauung solcher Größen uns aufgedrungene Seynsart derselben.

Im Anschauen solcher Größen unterscheiden wir niemals Theile, die schon durch gewisse Gränzen im Raume, innerhalb welcher sie sich befinden, bestimmt sind und die sich uns zwischen diesen Gränzen als solche aufdringen, welche nicht selbst wieder aus Theilen bestehen, also einfach sind, wir schauen vielmehr jede ausgedehnte Größe nur als ein Etwas an, welches von einer Stelle im Raume bis zu einer andern reicht, worin sich also wohl Theile unterscheiden lassen, von welchen wir aber aus der blosen Anschauung noch keineswegs wissen, ob wir uns unter diesen auch so kleine vorzustellen haben, die untheilbare Elemente der größern Theile und also auch der ganzen Größe sind. — Es enthält demnach der oberwähnte Be-

griff von ausgedehnten Größen eine zweite Bestimmung b, die von der ersten a wesentlich dadurch verschieden ist, daß sie nicht, wie die Bestimmung b, zu solchen, wozu wir uns unmittelbar durch die Anschauung aufgefordert fühlen, sondern die vielmehr zu solchen gehört, welche durch den Verstand gesetzt werden und von denen erst zu untersuchen ist, ob sie mit unsern Erkenntnißgesetzen in Harmonie stehen und ob also sie, oder ihre Gegensätze gesetzt werden müssen.

C) Diese Untersuchung übergehen iene, welche Raum- und Zeitpuncte behaupten, gänzlich und weisen sie auf eine ganz sonderbare Weise von der Seite dadurch, daß sie Folgendes sagen:

„Es würde sehr sonderbar seyn, wenn man „fragen wollte, ob die Raum- und Zeit-„puncte ausgedehnt seyen, eben des-„wegen, weil man ia diese in dem oberwähnten Begriffe von ausgedehnten Grö-„ßen als einfache Elemente derselben „festgesetzt habe."

Wenn man diese Festsetzung ohne alles Weitere anzunehmen genöthigt wäre, so würde es freilich eine offenbare Albernheit seyn, wenn man noch nach Ausdehnung der Raum- und Zeitpuncte fragte, hier aber ist nothwendig erst die Frage zu entscheiden,

„ob man denn auch geistesgesetzmäßig zu

„jener Satzung von Raum- und Zeitpunc-
„ten befugt sey."

2) Man kann mehrere ganz unumstößliche Beweise führen, daß die Annahme der Raum- und Zeitpuncte eine ganz grundlose Verstandessatzung sey, die mit der Gesetzmäßigkeit unseres Geistes, an welche sich dieser in seinem Vorstellen des Raumes und der Zeit gebunden fühlt, im Widerspruche steht und ebendeswegen auch als Quelle von ganz unstatthaften Sätzen und Widersprüchen erweisbar seyn muß. Diese Beweise sind folgende:

A) Erster Beweis:

a) Es ist Thatsache, daß wir uns unmittelbar an den materiellen Gegenständen, die wir im Raume sinnlich wahrnehmen, und an den von diesen erfüllten Räumen selbst Gränzen vorstellen, worin diese Räume aufhören und von dem übrigen Raume umgeben sind, und daß wir uns diese Gränzen, die wir Flächen nennen, nicht, wie die Räume selbst, nach Länge Breite und Höhe oder Dicke, sondern nur nach Länge und Breite ausgedehnt vorstellen. Desgleichen ist es auch Thatsache, daß wir uns an den Flächen wiederum Gränzen, worin diese im Raume aufhören, die wir Linien nennen, und daß wir uns diese nur nach der Länge ausgedehnt vorstellen. Endlich ist es Thatsache, daß wir uns auch an den Linien und in denselben Gränzen im Raume vorstellen, worin die-

se aufhören oder aufhören können, die wir Puncte nennen und die wir uns als das absolute Ende aller Ausdehnung zu denken haben, weil sie als Ende der weder breiten noch dicken Linien nicht breit und dick aber auch nicht lang seyn können. Die hier erwähnten Flächen, Linien und Puncte nennt man mathematische oder geometrische. Daß wir uns zu der Vorstellung dieser Gränzen genöthigt fühlen, das können auch diejenigen nicht läugnen, die sich den Raum aus einfachen Elementen zusammengesetzt denken wollen, und eben deswegen unterscheiden diese ihre einfachen Raumpuncte und die Linien und Flächen, die sie sich aus solchen zusammengesetzt denken, von den vorerwähnten mathematischen Puncten, Flächen und Linien dadurch, daß sie die ersteren Raumpuncte, Raumlinien und Raumflächen nennen.

b) Da die mathematische Linie im Raume vorgestellt wird, so ist auch ihre Gränze, das mathematische Punct, eine Stelle im Raume. Da man ferner das mathematische Punct als das absolute Ende aller Ausdehnung anzuerkennen hat, so ist es die absolut einfachste Stelle im Raume, die wir zu setzen vermögend sind.

c) Diesem zufolge muß anerkannt werden, daß iede andere Stelle im Raume, die kein mathematisches Punct seyn soll, nothwendig, wie klein diese auch immerhin

gesetzt werden mag, mehr als ein mathematisches Punct seyn muß; weniger kann sie unmöglich seyn. Also muß auch iedes Raumpunct P nothwendig mehr, als ein mathematisches Punct, seyn.

d) Soll aber eine durch das Wort Raumpunct bezeichnete Stelle P im Raume mehr seyn, als ein bloses mathematisches Punct a, so muß es nothwendig von einem mathematischen Puncte a bis zu einem andern b reichen, es muß also zwey mathematische Puncte auf einander entgegengesetzten Seiten zu Gränzen haben, denn wäre dieses nicht, so wäre ia P das mathematische Punct a oder b selbst und also nicht mehr, als a oder b, was es doch seyn muß (Nr. c).

e) Weil das Raumpunct P von einem mathematischen Puncte a bis zu einem andern b reichen und also wenigstens zwey solcher Puncte zu Gränzen haben muß, so ist es ein Etwas zwischen a und b und zwar ein solches, welches mehr ist, als das mathematische Punct a, mehr, als das mathematische Punct b, aber nothwendig auch mehr seyn muß, als ein zwischen a und b fallendes mathematisches Punct c. Denn wenn dieses Etwas blos ein solches Punct c wäre, so müßte ia dieses Punct c, welches als Gränze einer Linie unmöglich von a bis b breit seyn kann, das absolute Ende aller Ausdehnung seyn und doch zwey Ausdehnungs-

gränzen a und b haben, was ganz offenbarer Unsinn wäre.

f) Weil nun das zwischen a und b fallende Raumpunct P mehr seyn muß, als ein bloses mathematisches Punct c, so muß sich nothwendig auch in ihm selbst ein mathematisches Punct c, welches nicht a und auch nicht b ist, setzen lassen, es muß sich nothwendig setzen lassen, daß sich in ihm selbst eine mathematische Linie endigen könne, deren Ende c weniger ist, als das Raumpunct P selbst: denn wäre dieses nicht möglich, so wäre P nicht mehr, als ein bloses mathematisches Punct c, was doch nach Nr. c nicht seyn kann.

g) Wenn aber zugegeben werden muß, daß zwischen a und b innerhalb des P nothwendig ein mathematisches Punct c vorstellbar seyn müße, so muß auch zugegeben werden, daß zwischen a und c und zwischen c und b zwey Theile von P liegen, von welchen der eine von c bis a und der andere von c bis b reicht, daß also P nothwendig aus zwey Theilen bestehen muß,

B) Zweiter Beweis.

(Man muß sich hier die Linien nach der Vorschrift vorzeichnen).

a) Man ziehe eine gerade Linie AB, z. B. von der Linken zur Rechten. Im Anfangspuncte A derselben ziehe man eine zweite Linie AC gegen die AB so, daß sie beliebig, z. B. winkelrecht, gegen AB geneigt

ist. Die AB denke man sich ferner von A aus in beliebige gleichgroße Theile getheilt und die Theilstriche durch 1, 2, 3, 4.... bezeichnet.

b) Diese AB muß von uns geistesgesetzmäßig vorgestellt werden als verlängerbar ohne Ende fort und es muß daher auch mit Nothwendigkeit anerkannt werden, daß die Zahlenreihe der in der AB und in ihrer Verlängerung vorstellbaren Theilstriche 1, 2, 3... ohne Ende fortsetzbar sey.

c) Linker Hand der AC nehme man ferner in beliebiger Entfernung von der AC und Höhe über der AB eine Stelle S an, so daß die aus S in die Puncte 1, 2, 3.... der AB ziehbaren geraden Linien S1, S2, S3 ꝛc. ꝛc. die AC durchschneiden. Nun ziehe man diese Linien, so faßt iede folgende mit der ihr vorhergehenden einen Theil der AC zwischen sich.

d) Diese Linien S1, S2, S3 ꝛc. ꝛc. fallen, ie länger sie werden, immer schiefer gegen die AB und fassen, wenn, wie angenommen worden ist, die Theile A1, 1..2, 2..3 ꝛc. ꝛc. gleich groß sind, immer kleinere Theile der AC zwischen sich, ie weiter ihre Endpuncte in der AB von A abstehen; es muß also hier geistesgesetzmäßig anerkannt werden, daß die Theile der AC, welche die von S aus in die Theilpuncte der AB gezogenen Linien S1, S2, S3 ꝛc. ꝛc. zwischen sich fassen, so lange fort immer kleiner werden müssen,

als man der AB fortgesetzt Theile T = A 1 durch Verlängerung derselben zusetzen kann.

e) Da nun nach Nr. b geistesgesetzmäßig anerkannt werden muß, die AB sey ohne Ende verlängerbar und die Zahl ihrer Theilpuncte 1, 2, 3.... könne ohne Ende fortgesetzt werden, nebst dem aber auch zugegeben werden muß, daß sich aus S in jedes neu angenommene Theilpunct der Verlängerung der AB eine gerade Linie ziehen lasse; so muß auch nach Nr. d gesetzt werden, die Erzeugung immer kleinerer Theile der Linie AC durch die aus S durch sie hindurch gegen immer neu angenommene und in gleichen Abständen auf einander folgende Puncte der Verlängerung der AB gezogenen Linien sey durch keine Gränze beschränkt und es gebe also keinen kleinsten Theil der AC, also kein Raumpunct in derselben. — Enthielte die AC Raumpuncte, so müßten nothwendig von den aus S in die Verlängerung der AB gezogenen und die AC durchschneidenden geraden Linien endlich einmal ein Paar solcher Linien folgen, die nur ein Raumpunct der AC zwischen sich faßten, und die auf diese Linien folgenden Linienpaare müßten, weil das Raumpunct das einfachste Raumelement seyn soll, nichts mehr von der AC zwischen sich fassen, sie müßten also auf einander fallen, obschon sie als Linien vorgestellt werden, die von S aus gegen verschiedene Puncte der Verlängerung der AB hin divergi-

ren, welche Folgerung offenbar in sich selbst widersprechend ist.

C) Auf ähnliche Weise kann nun auch, weil sich ieder Zeittheil durch eine Linie darstellen läßt, leicht gezeigt werden, daß die oberwähnten Zeitpuncte blose Fictionen des Verstandes sind, die mit unseren Anschauungsgesetzen in Disharmonie stehen.

3) Da aus dem Bisherigen offenbar ist, daß wir unvermögend sind, uns geistesgesetzmäßig Raum- und Zeittheile zu denken, die einfach und also keine Größen sind, so ist hiermit auch erwiesen, daß ieder einen Raum- und Zeittheil erfüllende Gegenstand eine Größe seyn muß.

Hiermit ist die unbeschränkte Gültigkeit des am Anfange dieses Syhens angegebenen Geistesgesetzes außer allen Zweifel gesetzt.

II.

Das Einzelndenken und Miteinanderdenken der Größen.

§ 5.

Die zweite Geistesthätigkeit, die wir hier zu beachten haben, ist folgende:

„Wir denken uns nicht blos einzelne Ge„genstände als Größen, sondern wir denken „uns auch mehrere Größen miteinander „und bringen durch die letztere Thätigkeit „mancherley Producte hervor."

Beyspiele von dem Denken einzelner Größen sind in § 1. angeführt worden.

Beyspiele von dem Miteinanderdenken mehrerer Größen sind folgende: Wir denken uns eine Menge Ducaten mit einer oder mit mehreren Mengen solcher Münzen zu einer Menge vereinigt, oder eine Menge Ducaten in zwey oder mehrere Mengen zerlegt. — Wir denken uns eine Menge Ducaten mit einer andern verglichen. Wir denken uns zwey Linien zu einem Winkel, drey Linien zu einem Dreiecke verbunden; u. s. w.

III.

Formen, Producte, Gesetze des Denkens einzelner Größen.

§ 6.

Wenn wir nun zuvörderst die eine Thätigkeit unseres Geistes, die im Denken einzelner Gegenstände als Größen besteht, besonders in Betrachtung nehmen, so finden wir, daß uns verschiedene Formen dieses Denkens eigenthümlich sind, worin wir uns mehrerley formal verschiedene Größenarten zu denken pflegen.

Z. B. Eine Ducatenrolle wird in einer andern Form als Größe gedacht, als eine Goldstange: diese wiederum in einer andern Form, als ein Tag; dieser abermals in einer andern, als der Gesammtdruck, welchen eine Schicht über einander gelegter Ducaten gegen den Theil der flachen Hand, auf welchen diese aufgesetzt ist, ausübt, oder als der durch mehrere Lichter erzeugte Beleuchtungsgrad eines Zimmers. U. s. w.

§ 7.

Wegen der verschiedenen uns eigenthümlichen Formen des Denkens einzelner Gegen-

stände als Größen und der verschiedenen Größenarten, die wir in diesen Formen zu denken vermögend sind, ist es nöthig, daß diese Formen systematisch aufgesucht, daß nach ihnen die verschiedenen von uns denkbaren Größenarten als die Producte unseres Denkens in diesen Formen eingetheilt und daß dabey zugleich auch die Gesetze gehörig erwogen werden, an die sich unser Geist in dieser seiner Thätigkeit gebunden fühlt.

§ 8.

Wenn wir dieses unternehmen, so finden wir, daß zuvörderst zwey oberste einander entgegengesetzte Formen des Denkens der Größen aufzustellen und also alle von uns denkbaren Größen zuvörderst in zwey oberste formalverschiedene Größengattungen einzutheilen sind, wie aus Folgendem erhellet.

1) Wir gehen in unserem Denken gewisser Größen, z. B. einer Ducatenrolle,

A) von mehreren Gegenständen (den Ducaten) aus, die wir

a) durch gewisse Bestimmungen derselben im Raume oder in der Zeit von einander unterscheiden, übrigens aber dennoch

b) durch einerley Begriff als gleichartige Gegenstände (z. B. durch den Begriff Ducaten) denken, und schreiten von diesen Gegenständen

B) zu einer aus ihnen erzeugten und die

Gegenstände als ihre Theile in sich begreifenden Größe (z. B. einer Ducatenrolle, einem Ducatenhaufen) und zwar dadurch fort, daß wir uns die mehreren Gegenstände zu einem Gegenstande vereinigt denken.

2) Wir gehen aber auch in unserem Denken gewisser Größen (z. B. einer Goldstange) umgekehrt

A) von einem Gegenstande (der Goldstange) aus und von diesem

B) auf mehrere aus ihm erzeugbare und in ihm enthaltene Gegenstände zurück, und zwar dadurch, daß wir uns den einen Gegenstand in mehrere Gegenstände, die sich

a) durch gewisse Bestimmungen derselben im Raume oder in der Zeit von einander unterscheiden, übrigens aber

b) durch einerley Begriff als gleichartige Gegenstände denken lassen,

zerlegbar oder auflösbar denken.

§ 9.

Für die in der einen oder andern der beiden so eben angegebenen Denkformen gedachten Größen sind verschiedene die Theile der Größen und die Größen selbst betreffende Benennungen in Gebrauch gekommen, wovon hier gehandelt werden muß.

1) Für die in der ersten der beiden vorerwähnten Formen gedachten Größen.

Ueber die hierher gehörenden Benennungen ist zuvörderst zu bemerken, daß bey der Bildung und Wahl derselben vorzugsweise entweder auf die eine oder auf die andere der Bestimmungen, die den Theilen dieser Größen oder diesen Größen selbst zukommen, Rücksicht genommen worden ist.

A) In der besondern Rücksicht, daß bey den in dieser Form gedachten Größen die Theile derselben durch gewisse Bestimmungen im Raume oder in der Zeit von einander unterschieden werden (discernuntur), nennt man diese Theile unterschiedene (partes discretae) oder discrete. Hiernach sind die mit solchen Theilen gedachten Größen solche, die aus discreten Theilen bestehen (partibus discretis const.). Man pflegt aber auch solche Größen selbst discrete zu nennen, welche Benennung eigentlich falsch ist, weil sie nicht bezeichnet, was durch sie bezeichnet werden soll, denn eine discrete Größe heißt eigentlich eine von andern Größen unterschiedene, keineswegs aber eine aus discreten Theilen bestehende Größe, was man doch eigentlich sagen will.

Auch pflegt man statt des Ausdruckes unterschieden (discretus) das Wort unterbrochen (interruptus) zu brauchen, welches ebenfalls unrichtig ist. Eine Größe, deren

Theile discrete sind, ist eine solche, worin man Theile durch gewisse Bestimmungen derselben im Raume, oder in der Zeit von einander unterscheidet, dazu aber ist keineswegs nothwendig, daß diese Theile durch Zwischenräume oder Zwischenzeiten unterbrochen oder von einander getrennt seyen, obschon sie dieses seyn können.

Eine aus Zollen zusammengesetzte Linie, aus Stunden zusammengesetzte Zeit ist eine aus bestimmten oder discreten Theilen bestehende Größe, sie braucht aber deswegen keine aus unterbrochenen Theilen bestehende Größe zu seyn, wie ein Zug Soldaten, eine Reihe Ducaten, eine aus mehreren Arbeits Tagen bestehende Arbeitszeit rc. rc.

„Man begreift aus dem Bisherigen, daß „man discrete und unterbrochene Grö„ßen nicht zu verwechseln und die discreten „Größen in unterbrochene und ununterbrochene einzutheilen hat."

B) In der besondern Rücksicht ferner, daß bey den hier betrachteten Größen die in ihnen gedachten discreten oder bestimmten Theile durch einerley Begriff als gleichartige Gegenstände gedacht werden, sind gewisse Benennungen üblich geworden, die aber öfters unter sich selbst und auch mit gewissen andern ihnen entgegengesetzten verwechselt werden, weswegen Folgendes zu bemerken nothwendig ist:

a) Die Theile einer Größe, die als discre-

te und gleichartige gedacht werden, nennt man Einer (unitates). Diejenige Allgemeinvorstellung oder derjenige Begriff, wodurch die discreten Theile einer Größe als gleichartige gedacht werden, wird Einheit genannt. Gewöhnlich nennt man aber auch die Einer selbst Einheiten, welches eigentlich falsch ist, denn der Theil einer Größe ist verschieden von dem Begriffe, wodurch die Theile gemeinschaftlich als gleichartige gedacht werden. Jeder auf eine Gattung von Dingen sich beziehende Begriff ist eine Einheit (des Bewußtseyns) aber nicht jede Einheit ist ein Einer.

b) Die Qualität einer Größe, daß diese nicht blos schlechthin als ein aus Theilen bestehender Gegenstand, als eine Größe, sondern als eine solche Größe gedacht wird, die aus Einern besteht, nennt man das Vielseyn und auch die Vielheit der Größe. Die Größe selbst, welche mit dieser Qualität gedacht ist, heißt ein Vieles und auch eine Menge. — Bey jedem Vielen oder jeder Menge kann gefragt werden, wie viele Einer sie in sich enthalte oder auch, wie groß die Vielheit ihrer Einer sey (quanta sit multitudo unitatum), deswegen wird eine solche Größe auch ein Wievieles (Quantum) und die bestimmt Vielheit derselben wird Sovielheit oder (Quantitas) und auch Werth (valor) genannt.

c) Im Gegensatze der in voriger Nr. a und b

angegebenen Begriffe und Benennungen sind nun noch gewisse Begriffe und Ausdrücke zu merken, die man von den vorigen wohl zu unterscheiden hat.

a) Im Gegensatze der Qualität, daß ein Gegenstand mit andern Gegenständen vereinigt einem dritten Gegenstande zugehöre, daß er also Theil eines Gegenstandes sey, können wir uns die Qualität denken, ein Gegenstand sey mit keinem Gegenstande vereinigt, er sey allein vorhanden. Diese Qualität nennen wir das Einzelnseyn und der Gegenstand, dem sie zukommt, wird ein einzelner genannt. Ein Einzelnes und ein Einer sind demnach ganz entgegengesetzte Dinge, denn der Einer wird als bestimmter Theil einer Größe gedacht.

b) Im Gegensatze der Qualität, daß ein Gegenstand ein aus andern Gegenständen vereinigter, daß er eine Größe sey, können wir die Qualität denken, daß er dieses nicht sey, in welchem Falle er dann, wie schon in § 3. bemerkt worden ist, ein Einfaches (Simplum) genannt wird.

c) Diesem nach ist der Größe das Einfache und dem Theile und dem Einer das Einzelne entgegengesetzt. Hierbey ist leicht begreiflich, daß das Große und das Viele als ein Einzelnes und daß auch umgekehrt ein Einzelnes

als ein Großes und Vieles gedacht werden kann. Aber ein Theil oder Einer, welcher zu Raum oder Zeit selbst oder zu einem in Raum und Zeit enthaltenen Gegenstande gehört, kann nach § 4. nicht als ein Einfaches gedacht werden.

C) In der besondern Rücksicht endlich, daß wir ein Quantum erzeugen, indem wir einem Gegenstande noch einen solchen, diesen beiden Gegenständen wiederum einen solchen ꝛc. ꝛc. beifügen (aggregamus), diese Operation nach Belieben endigen oder fortsetzen und am Ende derselben die mehreren Gegenstände zu einem Gegenstande, (mehrere Ducaten z. B. zu einem Haufen, einer Rolle, einer Reihe, mehrere Vögel zu einem Zuge ꝛc. ꝛc.) zusammengefaßt denken, wird ein Quantum auch ein Aggregat (aggregatum) und dessen Einer werden Aggregattheile (partes aggregationis) genannt. Man bedient sich aber dieser Ausdrücke auch vorzugsweise für solche Größen, deren Theile nicht als in einander verschmolzen (wie z. B. die Theile einer durch mehrere Lichter erzeugten Beleuchtung eines Zimmers) sondern als außer einander vorhanden vorgestellt werden.

2) Für die in der zweiten von den beiden im vor. Sphen angegebenen Formen gedachten Größen.

Bey solchen Größen nennt man die Theile, die sich in ihnen durch gewisse Bestimmun-

gen derselben im Raume und in der Zeit von einander unterscheiden und worein sich diese Größen zerlegen lassen, ununterschiedene (partes indiscretae) oder indiscrete. Hiernach pflegt man diese Größen selbst, weil sie aus indiscreten Theilen bestehen, indiscrete zu nennen, welcher Ausdruck aber unrichtig ist, weil er keineswegs das, was er soll, sondern nur Größen, die nicht von andern unterschieden werden, bezeichnet.

Auch pflegt man solche Größen ununterbrochene (non interrupta) zu nennen. Dieser Ausdruck ist wohl in der Hinsicht passend, daß bey Größen, bey welchen keine Theile durch bestimmte diesen Theilen zugehörende Gränzen im Raume oder in der Zeit unterschieden werden, auch keine Theile durch Zwischenräume oder Zwischenzeiten unterbrochen oder von einander getrennt seyn können, er muß aber in einer andern Hinsicht vermieden werden, und diese ist Folgende: Wir können uns nach Nr. 1, A Größen, die aus Einern bestehen, also Quanta, deren Einer unterbrochen, aber auch solche, deren Einer ununterbrochen sind, denken; deswegen haben wir die Bestimmungen unterbrochen und ununterbrochen für zwey verschiedene Arten von discreten Größen aufzusparen und also das Wort ununterbrochen nicht in der Bedeutung des Wortes indiscret zu nehmen.

3) Die Hauptresultate des Bisherigen bestehen in Folgendem: Es sind uns zwey oberste Denkformen eigenthümlich, worin wir uns zwey formalverschiedene Grö-

ßengattungen denken. Die eine Gattung begreift solche Größen in sich, deren Theile discrete sind und durch eine Einheit des Bewußtseyns als gleichartige Theile, als Einer, gedacht werden, und diese Größen sind Quanta; man nennt sie auch Aggregate und auch, aber unrichtig, discrete Größen. Der zweiten Gattung gehören hingegen solche Größen zu, deren Theile indiscrete sind, die wir uns aber in discrete und gleichartige Theile oder Einer zerlegt und somit in Quanta verwandelt denken können, und dergleichen Größen pflegt man, iedoch unrichtig, indiscrete zu nennen. Man hat demnach Größen mit discreten gleichartigen und Größen mit indiscreten Theilen als die beiden obersten formal verschiedenen Größengattungen zu unterscheiden. Die Größen der erstern Gattung können aus unterbrochenen und auch aus ununterbrochenen, aber die Größen der andern Gattung müßen nothwendig aus ununterbrochenen Theilen bestehen, dürfen aber deswegen doch nicht ununterbrochene Größen genannt werden, weil auch die Größen der erstern Gattung ununterbrochen seyn können.

§ 10.

Nehmen wir nun weiter in Untersuchung, ob uns auch verschiedene Formen eigenthümlich sind, worin wir uns Größen mit discreten und gleichartigen Theilen oder Quanta denken können, so finden wir, daß wir uns bey solchen Größen nicht nur die Einer dersel-

ben, sondern auch ihre Vielheit und desgleichen auch die Vereinigung ihrer Einer in verschiedenen Formen zu denken vermögend sind, wie aus Folgendem erhellet:

1) Verschiedenheit der Formen des Denkens der Quanta rücksichtlich ihrer Einer. — Wir denken uns

A) Quanta auf folgende Weise:

a) Wir gehen von mehreren Gegenständen aus, die wir blos durch die Zeitmomente, worin wir diese nach einander setzen und sie einander beifügen, von einander unterscheiden, die wir

b) durch denienigen Begriff, welcher der allgemeinste, (der alle und iede Gegenstände unter sich fassende), ist und durch das Wort Etwas oder Gegenstand bezeichnet wird, als gleichartige Gegenstände auffassen, und die wir endlich

c) blos durch den allgemeinen Begriff Vieles, oder Menge, oder Quantum aus gänzlich unbestimmten Einern zu einem Gegenstande zusammen fassen. — Wir denken uns aber auch

B) Quanta auf folgende Weise:

a) Wir gehen von mehreren Gegenständen aus, die wir nicht blos durch die Zeitmomente, worin wir sie nach einander setzen und einander beifügen, sondern durch gewisse Bestimmungen oder Seynsarten der-

selben im Raume und in der Zeit als Dinge bestimmter Art von einander unterscheiden, die wir daher

b) nicht blos durch den allgemeinen und ganz unbestimmten Begriff Etwas oder Gegenstände, sondern durch einen auf Dinge bestimmter Art sich beziehenden Begriff auffassen und die wir daher auch

c) durch diesen Begriff als ein Vieles, eine Menge, oder ein Quantum aus bestimmten Einern zu einem Gegenstande zusammenfassen.

Wir denken uns z. B. nur schlechthin ein Vieles, eine Menge, ein Quantum von Dingen, seyen übrigens diese Dinge, welche sie wollen; wir denken uns aber auch im Gegensatze dieses Productes ein Vieles, eine Menge, ein Quantum, dessen Einer bestimmte Dinge, Ducaten, Zolle, Minuten, Wärmegrade &c. &c. sind.

2) Verschiedenheit der Formen des Denkens der Quanta rücksichtlich ihrer Vielheit. — Wir denken uns

A) Quanta, die aus unbestimmten oder bestimmten Einern bestehen, mit unbestimmter Vielheit oder Quantität derselben; z. E. wir denken uns nur schlechthin eine Menge von Dingen, eine Menge, einen Haufen Ducaten, einen Zug Vögel, eine Heerde Vieh, eine Truppe Menschen &c. &c. Wir denken uns aber auch

B) Quanta, die aus unbestimmten oder bestimmten Einern bestehen, mit bestimm-

ter Vielheit, mit Sovielheit oder Quantität oder Werth, z. B., wir denken uns ein Quantum, welches aus einem und noch einem, oder aus einem, noch einem und noch einem ꝛc. ꝛc. Dinge unbestimmter Art, oder bestimmter Art, z. B. aus Ducaten, Zollen ꝛc. ꝛc. besteht — Für dieses Denken der bestimmten Vielheit oder Sovielheit, der Quantität oder des Werthes eines Quantums sind uns unbestimmbar viele Denkformen eigenthümlich, denn wir können uns ohne Ende fort gleichartige Gegenstände einander beigefügt denken, und hier ist bey jedem neuen in unserem Vorwärtsschreiten vorgenommenen Schritte die Form des Denkens der Sovielheit des erzeugten Quantums eine andere.

3) Verschiedenheit der Formen des Denkens der Quanta rücksichtlich der Vereinigung ihrer Einer. — Wir denken uns

A) Quanta mit Einern bestimmter Art, die durch Zwischenräume oder Zwischenzeiten unterbrochen sind, und auch

B) solche, bey welchen das Gegentheil hiervon Statt hat,

auf welche zwey Formen schon im vorigen §phen wegen der dort nöthigen richtigen Feststellung der Begriffe und der Bezeichnung derselben aufmerksam gemacht werden mußte.

§ 11.

Wegen der im vorigen §phen angegebenen verschiedenen Formen, worin wir uns Größen als Quanta denken können, sind verschiedene Benennungen der Quanta nothwendig geworden, wovon hier gehandelt werden muß.

1) Benennungen der Einer der Quanta und der Quanta selbst nach diesen Einerbenennungen

A) Einer, die nur schlechthin als solche, also ohne weitere Bestimmung, was für Gegenstände sie übrigens noch seyen, gedacht und daher auch nicht benannt werden, nennt man unbenannte und auch abstracte, weil bey solchen nur die Bestimmungen die dem Begriffe Einer zugehören, gedacht werden und von den übrigen noch möglichen Bestimmungen derselben abstrahirt wird (mens abstrahitur). — Nach den sogenannten Einern werden auch die aus solchen Einern bestehenden Quanta unbenannte oder abstracte Quanta genannt.

B) Einer, die nicht nur schlechthin als solche, sondern die mit weiterer Bestimmung, was für Gegenstände sie auch noch außerdem, daß sie Einer sind, gedacht und daher auch durch ein besonderes Wort bezeichnet werden, nennt man benannte und auch concrete, weil bey solchen nicht von allen ihren übrigen Bestimmungen, die ihnen

noch außer denen zukommen, wodurch sie Einer sind, abstrahirt wird, sondern gewisse von den ersteren mit den letzteren in Verbindung (in concreto) gedacht werden. — Nach den so benannten Einern werden auch die aus solchen Einern bestehenden Quanta benannte oder concrete genannt.

2) Benennungen der Vielheit der Einer der Quanta und der Quanta selbst nach diesen Vielheitsbenennungen.

A) Quanta, die ohne Bestimmung des Sovielseyns, der Quantität oder des Werthes derselben gedacht werden, nennt man unbestimmte und diese können rücksichtlich ihrer Einer nach vor. Nr. 1. sowohl abstracte als auch concrete seyn.

B) Quanta, die mit Bestimmung des Sovielseyns, der Quantität oder des Werthes derselben gedacht werden, nennt man bestimmte, und diese können ebenfalls nach vor. Nr. 1. abstracte oder concrete seyn.

Wir können uns aber, wie schon vorhin erinnert worden ist, die bestimmte Vielheit, die Sovielheit oder Quantität der Quanta in unbestimmbar vielen Formen denken, daher auch für diese die hierher gehörenden Begriffe und Benennungen angegeben und zugleich auch die dabey möglichen falschen Ansichten aus dem Wege geräumt werden müßen, was durch Folgendes geleistet wird.

a) Die unbestimmbar vielen Formen, worin

wir uns bey bestimmten Quantis das bestimmte Vielseyn, die Sovielheit oder Quantität derselben zu denken pflegen, können Sovielheits- oder Quantitätsformen genannt werden; man nennt sie aber gewöhnlich Zahlen (numeri). — Nothwendig müßen diese Formen unterschieden werden von den Gegenständen selbst, die wir uns in ihnen als bestimmte Quanta denken, denn diese sind mehr, als die blosen Sovielheitsformen oder Zahlen, worin sie als Quanta gedacht werden. Eine Münze z. B., die wir uns nach Einern, die Kreuzer heißen, als ein bestimmtes Quantum denken und deren Sovielheit darin besteht, daß sie einen, noch einen und noch einen Kreuzer in sich enthält, welche Sovielheitsform oder Zahl wir durch das Wort drey zu bezeichnen pflegen und wornach wir sagen, die Münze enthalte drey Kreuzer, sie sey ein Dreikreuzerstück, ist nicht die Sovielheitsform oder Zahl drey selbst, sondern sie ist mehr, als diese; sie ist ein Gegenstand, eine Münze, in der besondern Quantitätsform drey gedacht, sie ist ein Dreikreuzerstück oder ein Groschen. — Dieselbe Münze wird, wenn wir sie uns nach Einern, die Pfenninge sind, denken, ein Gegenstand, bey welchem eine andere Quantitätsform oder Zahl, die wir durch das Wort zwölf bezeichnen, Statt hat; sie wird ein in der Zahl zwölf gedachter Gegenstand, ein Zwölfpfen-

ningstück. — Eben diese Unterscheidung eines als bestimmtes Quantum gedachten Gegenstandes von der Quantitätsform, worin er gedacht ist, findet auch in dem Falle Statt, wenn die Einer des Gegenstandes nur schlechthin als solche, also in abstracto, gedacht werden und das Quantum also ein unbenanntes oder abstractes ist. Ein abstractes Quantum z. B., bey welchem wir uns denken, die Form seines Sovielseyns oder seine Zahl sey die daß es aus einem, noch einem und noch einem Einer besteht, daß es drey Einer enthält, ist mehr, als die blose Zahl drey, es ist ein Dreier. — — Aus dieser Betrachtung des Unterschiedes zwischen den bestimmten Quantis und den Quantitätsformen oder Zahlen, worin diese Quanta gedacht werden, geht ohne Weiteres hervor, daß die gewöhnliche Definition des durch das Wort Zahl bezeichneten Begriffes nicht richtig ist. Eine Zahl, sagt man gewöhnlich, ist eine bestimmte Menge von Einheiten. In diesem Ausdrucke ist zuvörderst das Wort Einheit zu verwerfen und statt dessen das Wort Einer zu setzen (§ 9. 1, B, a), ferner aber ist aus dem Vorigen offenbar, daß dieser Ausdruck nicht die Erklärung der Zahl selbst, sondern eines in einer Zahl gedachten oder bestimmten Quantums ist; das Wie, die Form einer Menge ist nicht die Menge selbst und umgekehrt.

Weil man die Quantitätsformen Zahlen nennt, so pflegt man gewisse diese Formen betreffende Operationen durch das Wort Zählen (numerare) zu bezeichnen. — Wir können nämlich die verschiedenen von uns denkbaren Quantitätsformen oder Zahlen der Reihe nach durchlaufen und für iede dieser Formen einen bestimmten Sprach- und Schriftausdruck festsetzen: Diese Operation, die eigentlich im Bilden der Zahlen und der für sie nöthigen Sprach- und Schriftausdrücke besteht, wird durch das Wort zählen oder numeriren bezeichnet. Wir können aber auch die besondere Quantitätsform oder Zahl, worin wir uns ein vorgegebenes noch unbestimmtes Quantum nach gewissen für dieses angenommenen Einern, z. E. einen Haufen Geld nach Gulden, oder eine Linie nach Schuhen rc. rc. zu denken haben, aufsuchen; diese Operation, die im Aufsuchen der auf ein noch unbestimmtes Quantum passenden und nach den für dieses Quantum angenommenen Einern sich richtenden Zahl besteht, wird ebenfalls durch das Wort zählen bezeichnet. Es wird demnach dieses Wort in zweierley Bedeutung gebraucht. Nach der so eben erwähnten zweiten Bedeutung desselben pflegt man die unbestimmten Quanta auch ungezählte und die bestimmten hingegen gezählte zu nennen.

b) Da es wegen der unbestimmbar großen Menge von Zahlen, für die wir Sprach- und Schriftausdrücke nöthig haben, nicht möglich ist, daß iede Zahl durch ein einfaches Sprach- und Schriftzeichen be-

zeichnet werde, weil man auf solche Weise so viele einfache Zahlenworte und einfache schriftliche Zahlenzeichen (Ziffern) erhalten würde, daß sie nicht im Gedächtnisse behalten werden könnten; so hat man auf Kunstgriffe denken müßen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, alle und iede denkbare Zahlen wörtlich und schriftlich zu bezeichnen, ohne daß man dabey genöthigt ist, für iede einzelne Zahl ein eigenes einfaches Wort und eine Ziffer festzusetzen und zu merken. Diese Kunstgriffe bestehen darin, daß man nur eine gewisse Reihe von Zahlen durch einfache Wörter und Schriftzeichen bezeichnet, dann aus diesen Wörtern und Schriftzeichen die für die folgenden Zahlen erforderlichen Sprach- und schriftlichen Ausdrücke auf eine geschickte Weise zusammensetzt. Die wohlgeordnete Summe der Sätze, worin dieses gelehrt wird, nennt man ein Zahlensystem, deren bekanntlich mehrere möglich sind. Das bey uns übliche ist das, in welchem man sich zehen einfacher Zahlenwörter und Schriftzeichen bedient, die hier als bekannt angenommen werden. Man nennt dieses Zahlensystem bekanntlich das Decimal- oder dekatische System. — — Weil die Zahlen keine Quanta sondern nur Formen des bestimmten Vielseyns der Einer derselben sind, so sind auch die einfachen Zahlenwörter und die aus ihnen zusammengesetzten Zahlenausdrücke keine Hauptnennwörter (substantiva), sondern sie sind Nebennennwörter (ad-

jectiva). — Das haben die Grammatiker wohl eingesehen und doch konnte es den Mathematikern einfallen, die Zahlen als bestimmte Mengen von Einern — als bestimmte Quanta zu erklären, wornach die Zahlenwörter Substantiva seyn müßten —!

3) Benennungen, welche die Vereinigungsweise der Einer der Quanta betreffen.

Diese mußten schon in § 9. wegen der dort nothwendig gewordenen Begriffsbestimmungen angegeben werden. Es ist dort bemerkt worden, daß die Quanta wegen der zwey verschiedenen Formen (§. 10, Nr. 3.), worin wir uns die Einer derselben vereinigt denken können, in unterbrochene (partibus interruptis const.) und ununterbrochene einzutheilen sind. Statt des Wortes ununterbrochen bedient man sich auch des Wortes stetig oder continuirlich, wobey man sich denkt, daß das Ende des einen der unter einander vereinigten Theile der Anfang des nächstfolgenden sey. Diese Wörter bezeichnen aber eigentlich nur eine besondere Art des Nichtunterbrochenseyns, denn die in einander verschmolzenen Pressungen, woraus der Gesammtdruck, welchen mehrere über eine Stelle der flachen Hand auf einander gelegte Geldstücke gegen diese Stelle ausüben, zusammengesetzt ist, werden ebenfalls als ununterbrochene Theile vorgestellt, sind aber keineswegs stetig oder continuirlich unter einander verbundene Theile, wie die außer und unmittelbar neben ein-

ander liegenden Theile einer Linie oder die außer und unmittelbar nach einander folgenden Theile der Zeit.

4) Die Hauptresultate des Bisherigen bestehen in Folgendem: Die erste formale Größengattung zerfällt A) rücksichtlich der Einer der Quanta in zwey formal verschiedene Größenarten, nämlich in unbenannte und benannte Quanta; B) rücksichtlich der Vielheit der Einer zerfällt ferner dieselbe Größengattung ebenfalls in zwey formal verschiedene Größenarten, nämlich in unbestimmte oder ungezählte und in bestimmte oder gezählte Quanta; C) rücksichtlich der Vereinigungsweise der Theile, zerfällt endlich eben diese Größengattung auch noch in zwey formal verschiedene Größenarten, nämlich in unterbrochene und ununterbrochene Quanta.

§ 12.

Setzen wir die Untersuchung der verschiedenen Formen des Denkens einzelner Größen noch weiter fort und erwägen, ob uns auch für das Denken der aus indiscreten Theilen bestehenden Größen verschiedene Formen eigenthümlich sind, worin wir uns verschiedene Arten solcher Größen denken können, so ergiebt sich, daß auch dieses Statt hat, und daß diese verschiedenen Formen die Art, wie die Theile solcher Größen im Raume und in der Zeit vorhanden sind, und die Ver-

einigung derselben untereinander betreffen.

1) Verschiedenheit der Formen des Denkens der aus indiscreten Theilen bestehenden Größen rücksichtlich des Enthaltenseyns dieser Theile im Raume und in der Zeit. — Wir denken uns

A) Größen mit indiscreten Theilen, worin die in ihnen unterscheidbaren Theile zwischen verschiedenen Gränzen im Raume oder in der Zeit enthalten also außer einander und dergestalt vorhanden sind, daß bey ihnen Paare einander zunächstliegender Theile, die in einerley Raumgränze oder Zeitgränze zusammenhängen, vorgestellt werden.

Z. B. Die indiscreten Theile eines Körpers, einer Fläche, einer Linie, einer Zeit, eines in der Zeit abfließenden Tones ꝛc. ꝛc. werden von uns auf die hier angegebene Weise vorgestellt und gedacht.

Wir denken uns aber auch

B) Größen mit indiscreten Theilen, worin die in ihnen unterscheidbaren Theile insgesammt zwischen einerley Gränzen sowohl im Raume, als auch in der Zeit, also in einander und mithin dergestalt vorhanden sind, daß bey ihnen die vorerwähnte Vorstellung von Paaren einander zu nächstliegender und in einerley Raum- oder Zeitgränze unter einander zusammenhängender Theile nicht Statt hat.

z. B. Auf die hier angegebene Weise werden die indiscreten Theile folgender Größen gedacht. Die Theile der durch mehrere Lichter erzeugten Beleuchtung eines Zimmers, der Gradsumme der Erwärmung desselben, des Gesammtdruckes, welchen mehrere auf der flachen Hand übereinandergelegte Geldstücke gegen diese ausüben; eines aus den Tönen mehrerer gleichgestimmter Saiten eines Flügels zusammengesetzten Tones rc. rc. Die in den hier genannten Größen unterscheidbaren Theile sind insgesammt innerhalb derselben Raumgränzen gleichzeitig vorhanden und es findet bey ihnen die Vorstellungsweise von Paaren außereinander vorhandener und stetig untereinander zusammenhängender Theile nicht Statt, wie dieses z. B. bey den Theilen eines Körpers, einer Fläche, einer Linie und der Zeit der Fall ist.

2) Verschiedenheit der Formen des Denkens der aus indiscreten Theilen bestehenden Größen rücksichtlich des Vereinigtseyns dieser Theile untereinander.

Für die in voriger Nr. 1, A erwähnten Größen, in welchen die in ihnen unterscheidbaren indiscreten Theile als außereinander enthalten, aber in gemeinschaftlichen Gränzen im Raume oder in der Zeit untereinander zusammenhängend vorgestellt werden, sind uns wiederum zwey verschiedene Formen des Vorstellens derselben eigenthümlich.

A) Wir stellen uns dergleichen Größen auf die Weise vor, daß die außereinander befindlichen und unmittelbar untereinander zusammenhängenden Theile derselben solche seyen, die

gleichzeitig, also nebeneinander, im Raume vorhanden sind.

B) Wir stellen uns aber dergleichen Größen auch auf die Weise vor, daß die außereinander befindlichen und unmittelbar untereinander zusammenhängenden Theile derselben solche seyen, die ungleichzeitig, also nach einander, in der Zeit vorhanden sind.

Nach Nr. A werden die Theile des Raumes und der darin enthaltenen Körper, die Theile der Flächen und der Linien, nach Nr. B aber werden die Theile der Zeit und dessen, was in ihnen abfließt, z. B. eines Tones, vorgestellt und gedacht.

Für die in vor. Nr. 1, B erwähnten Größen, deren Theile als in einander enthalten gedacht werden, finden wir keine besondern Formen mehr, worin sich dergleichen Größen auf verschiedene Weise denken lassen.

§ 13.

Die im vorigen Sphen angegebenen verschiedenen Formen, worin wir uns die aus indiscreten Theilen bestehenden Größen denken können, haben mehrere Begriffe und Bezeichnungen derselben zur Folge, von welchen nun ebenfalls das Nöthige beigebracht werden muß.

1) Diejenige Seynsart der Theile einer Größe, die darin besteht, daß die Theile

außerhalb einander im Raume oder in der Zeit vorhanden sind und unmittelbar, also in gemeinschaftlichen Raum- oder Zeitgränzen, unter einander zusammenhängen, nennt man das Ununterbrochen- oder Stetigseyn und auch die Ununterbrochenheit oder Stetigkeit (continuitas) und die Theile selbst werden hiernach ununterbrochene, stetige, continuirliche (partes continuae) genannt. Die Qualität der Größen selbst, daß sie aus solchen Theilen bestehen, nennt man das Ausgedehntseyn, die Ausdehnung (extensio) derselben und die Größen, welchen diese Qualität zukommt, werden ausgedehnte, extensive (extensa) und auch Größen der Extension genannt. Auch pflegt man solche Größen nach ihren stetigen Theilen ununterbrochene, stetige, continuirliche zu nennen.

2) Diejenige Seynsart der Theile einer Größe, die darin besteht, daß die Theile nicht außerhalb einander sondern in einerley Raum- und Zeittheil in einander vorhanden sind, nennt man das Ineinanderseyn oder das Ineinanderverwachsenseyn (coalitio) und auch das Verschmelztseyn derselben unter einander. Auch sagt man von ihnen, es finde bey ihnen eine innere wechselseitige Aufnahme des einen Theils durch den andern Statt. Die aus solchen Theilen bestehenden Größen nennt man intensive und auch Größen der Intension oder Coalition.

3) Diejenige Art des Seyns einer extensiven Größe, daß sie aus außereinander

und unmittelbar nebeneinander befindlichen Theilen (partibus extra et juxta se positis) besteht, nennen wir die räumliche Ausdehnung (Expansio) und die Größen selbst, denen sie zukommt, sind hiernach räumlich ausgedehnte oder expansive (expansa) zu nennen.

Die Seynsart einer extensiven Größe hingegen, daß sie aus außereinander und unmittelbar nacheinander folgenden Theilen (partibus extra se et deinceps positis) besteht, nennt man die zeitliche Ausdehnung (protensio) und die Größen selbst, denen sie zukommt, werden zeitlich ausgedehnte, protensive (protensa) genannt.

4) Die Hauptresultate des Bisherigen bestehen in Folgendem: Die zweite formale Größengattung zerfällt in zwey formal verschiedene Größenarten, nämlich in Größen der Extension und in Größen der Coalition. Von diesen beiden Größenarten zerfällt die erste wieder in zwey Unterarten, nämlich in Größen der räumlichen Extension oder Expansion und in Größen der zeitlichen Extension oder Protension; die zweite Größenart aber läßt sich nicht weiter in Unterarten eintheilen.

§ 14.

Erwägen wir noch weiter, ob uns ferner auch noch für die Größen der Expansion und Protension verschiedene Formen des Vorstel-

lens derselben eigenthümlich sind, so ergiebt sich dieses:

1) Rücksichtlich der Größen der Expansion.

A) Zu diesen gehören alle Dinge und deren Theile im Raume und die Raumtheile selbst, die von diesen erfüllt sind. Solche Größen stellen wir uns als ausgedehnt vor nach allen und ieden von uns vorstellbaren Richtungen.

B) Zu eben diesen Größen gehören ferner auch die Gränzen der Dinge im Raume und der von ihnen erfüllten Raumtheile, die wir uns nicht nach allen Richtungen ausgedehnt vorstellen. Diese sind entweder nach zwey Hauptrichtungen oder nur nach einer Richtung ausgedehnt. (Vergl. § 4, Nr. 2, A).

2) Rücksichtlich der Größen der Protension finden keine verschiedene Formen des Vorstellens derselben Statt.

§ 15.

Hiermit stehen folgende Begriffe und Benennungen in Verbindung:

1) Größen der Expansion, die nach allen von uns vorstellbaren Richtungen ausgedehnt sind, nennen wir Koerper und auch Größen der körperlichen Expansion. Dieienigen

von ihnen, die aus Materie bestehen, werden materielle und auch physische Körper genannt; werden sie hingegen mit Abstraction von der den Raum erfüllenden Materie blos als Raumtheile vorgestellt, so nennt man sie mathematische und auch geometrische Körper, und zwar deswegen, weil die Mathematik und zwar in dieser der durch das Wort Geometrie bezeichnete Theil derselben die Größen der körperlichen Expansion nur in Rücksicht der Raumtheile, die sie einnehmen, aber nicht in Rücksicht der diese Theile erfüllenden Materie, in Betrachtung zu nehmen hat.

Unter den unbestimmbar vielen Richtungen, worin die bisher genannten Größen ausgedehnt sind, unterscheiden wir drey Hauptrichtungen, welche durch die Worte Länge, Breite und Höhe oder Dicke bezeichnet werden und von welchen iede als Richtschnur (norma) besonders beachtet werden muß, wenn man die Ausmessung (demensio) eines Körpers vornehmen will, weswegen man sie auch Normalrichtungen oder Abmessungen (demensiones) nennt und hiernach von den Größen der körperlichen Expansion sagt, sie seyen Größen von drey Abmessungen oder Demensionen.

2) Größen der Expansion, die nicht nach allen von uns vorstellbaren Richtungen ausgedehnt, also nur Gränzen der körperlich expandirten Größen sind, sind entweder solche, die nur nach Länge und Breite ausgedehnt sind,

und die man Flächen nennt, oder solche, denen blos Ausdehnung in die Länge zukommt und die Linien genannt werden. Von den Flächen sagt man daher, daß ihnen nur zwey Abmessungen zukommen, und von den Linien, daß sie nur eine Abmessung haben.

3) Resultat: Die Größen der Expansion sind entweder Körper oder Gränzen derselben und die letztern sind wiederum, sofern sie Größen seyn sollen, entweder Flächen oder Linien, denn die Puncte gehören zwar auch zu den Gränzen der Körper, weil sie Gränzen der Linien sind, sie gehören aber nicht zu den Größen (§ 4, Nr. 2, A)

§ 16.

Nehmen wir endlich auch noch in Untersuchung, in welchen verschiedenen Ausdehnungsformen wir uns die Körper und die Gränzen derselben, die Flächen und Linien, vorstellen können, so ergiebt sich noch kürzlich Folgendes:

Die Verschiedenheit der Formen der Körper hängt von den Formen ihrer Gränzen ab, daher mit diesen der Anfang der Betrachtung gemacht werden muß.

1) Die Gränzen der Körper.

A) Die Linien. Diese sind

a) solche, in welchen jeder wie auch immer-

hin klein vorgestellte folgende Theil mit dem nächst vorhergehenden Theile in einerley Richtung liegt; diese nennt man gerade Linien; oder sie sind

b) solche, in welchen ieder wie auch immerhin klein vorgestellte Theil mit dem nächstvorhergehenden nicht in einerley Richtung liegt; dergleichen Linien werden krumme genannt. — Diese können wiederum vorgestellt werden;

a) als solche, für welche sich ein bestimmtes Gesetz ihrer Krümmung angeben läßt, wie es z. B. bey der Kreislinie der Fall ist, deren Puncte insgesammt in einerley Ebene und zwar dergestalt liegen, daß sie alle um dieselbe Entfernung von einerley Punct in der Ebene abstehen; dergleichen krumme Linien nennt man gesetzmäßige;

b) als solche, für welche sich kein bestimmtes Gesetz ihrer Krümmung angeben läßt; diese nennt man ungesetzmäßige krumme Linien oder Schnörkel.

Anmerkung: Wir wissen von den uns vorgestellten Gegenständen weiter nichts, als das, wie sie von uns vorgestellt werden, die Arten und Weisen oder die Formen ihres Seyns für uns, die Qualitäten derselben. Diese Seynsarten bestehen entweder in Würkungsweisen der Dinge auf unsere Sinneswerkzeuge, in Empfindungsarten, die wir durch gewisse Worte, z. B.

süß, sauer rc. rc. bezeichnen und die wir daher empirische nennen, oder sie bestehen in Vorstellungsweisen der Dinge, in welchen wir uns diese zufolge der ursprünglichen Einrichtung unseres Geistes nothwendig vorstellen müßen, die wir ebenfalls durch gewisse Worte, z. B. gerichtet, ausgedehnt rc. rc. bezeichnen und die apriorische Seynsarten genannt werden. Aus solchen empirischen und apriorischen Seynsarten der Gegenstände setzen wir Begriffe zusammen, die sich daher auch wieder in die Vorstellungen von denjenigen Seynsarten, aus welchen sie zusammengesetzt sind, auflösen oder zerlegen, d. h., die sich erklären lassen. Wir haben demnach zweierley Seynsarten, einfache die sich nicht in andere auflösen, also nicht erklären lassen, und zusammengesetzte, die einer Zerlegung in andere Seynsarten, einer Erklärung fähig sind, zu unterscheiden. — Hiernach sind nun

gerad und krumm zwey einander entgegengesetzte Vorstellungsformen der Linien, die uns ursprünglich eigenthümlich, die a priori sind. Wollen wir uns die Gränze einer Fläche vorstellen, so sind wir durch die Natur unseres Geistes genöthigt, uns diese in der einen oder der andern der beiden durch die Worte gerad und krumm bezeichneten Formen vorzustellen, denn jene Vorstellungsform der Linien, nach welcher wir diese gebrochene nennen, ist eine zusammengesetzte, die nicht hierher gehört.

Diese zwey Vorstellungsformen geben uns daher Linien von zwey verschiedenen Seynsarten, gerade und krumme Linien. Weil aber diese beiden Formen apriorische einfache Formen des Vorstellens der Linien sind, so

kön-

können sie nicht in andere Formen aufgelößt oder zerlegt also nicht erklärt werden.

Das ist bey diesen Formen eben so unmöglich, wie es unmöglich ist, die durch die Worte süß, sauer, roth ꝛc. ꝛc. bezeichneten empirischen Vorstellungsformen oder Empfindungsformen in andere bekannte aufzulösen oder zu erklären, daher auch unmöglich dem Blinden, dem das Organ zu der durch das Wort roth bezeichneten Empfindungsform fehlt, eine Vorstellung von der rothen Farbe beigebracht werden kann.

Wenn man daher sagt, eine gerade Linie ist eine solche, worin jedes folgende wie auch immerhin kleine Theilchen mit dem nächstvorhergehenden in einerley Richtung liegt, und dabey die Meinung hegt, man habe die gerade Linie erkärt, so täuscht man sich sehr, denn geradseyn und in einerley Richtung liegen sind verschiedene Töne für ein und dieselbe Vorstellungsform und Seynsart einer Linie. Und eben so verhält sich die Sache bey der vermeinten Erklärung der krummen Linien; man drückt nur ein und dieselbe Seynsart derselben durch verschiedene Töne, einmal kurz, und dann weitläuftiger aus und meint hernach fälschlicher Weise, man habe das unerklärbare Krummseyn erklärt.

Ob sich nun gleich das Geradseyn und Krummseyn eben so wenig, wie das Süßseyn, Rothseyn ꝛc. ꝛc. erklären läßt, so haben sich doch die Mathematiker die krummen Linien als Zusammensetzungen aus sehr kleinen geraden Linien, die unter sehr stumpfen Winkeln untereinander verbunden sind, also als eine

besondere Art gebrochener Linien gedacht, haben unter dieser Voraussetzung Betrachtungen zur Erforschung der Natur der verschiedenen Arten der krummen Linien, der Gesetze ihrer Krümmung ꝛc. ꝛc. angestellt und sind ohnerachtet ihres Ausganges von einer Hypothese, die niemals richtig seyn kann, zur Erkenntniß des Wesens der verschiedenen Arten der krummen Linien gelangt. Damit hat es aber folgende Bewandtniß. Sie gingen aus von der Hypothese, daß eine krumme Linie eine gebrochene sey. Die Resultate ihrer Untersuchungen mußten also nothwendig nur für gebrochene Linien gelten. Sie berichtigten aber am Ende ihre Resultate auf die Weise, daß sie diese für solche gebrochene Linien einrichteten, deren gerade Theile, wie auch immerhin klein sie gedacht seyn mögen, doch noch nicht klein genug gedacht, die also keine gebrochenen Linien mehr, sondern krumme sind.

B) Die Flächen. Diese sind

a) solche, worinn iede in ihnen vorstellbare Linie, die mit allen ihren Puncten in sie fällt, eine gerade ist und die man ebene Flächen oder Ebenen nennt; oder sie sind

b) solche, worin nicht iede in ihnen vorstellbare Linie eine gerade ist, sondern worin entweder nur gewisse, oder alle Linien, die sich in ihnen ziehen lassen, krumm seyn müßen; dergleichen Flächen werden gebogene genannt.

Anmerkung; Wie gerad und krumm zwey ursprüngliche oder apriorische ganz einfache Vorstellungsformen sind, die keine Erklärung zulassen, eben so ist es auch bey den durch die Wörter eben und gebogen bezeichneten Vorstellungsformen und Seynsarten der von uns vorstellbaren Flächen der Fall; auch diese sind einfach, also keiner Erklärung fähig; die von ihnen ausgesprochenen Sätze (Nr A u. B) sind daher nur solche, die aus zwey verschiedenen Sprachausdrücken für ein und dieselbe Vorstellungsform oder Seynsort der Flächen bestehen.

2) Die Körper selbst. — Diese sind

A) solche, die blos von ebenen Flächen und geraden Linien begränzt werden, und

B) solche, die ganz oder zum Theile von gebogenen Flächen und krummen Linien begränzt sind.

§ 17.

Auch für die im vorigen §phen betrachteten Größenarten sind uns wieder verschiedene Formen des Vorstellens und Denkens derselben eigenthümlich. Die weitere Betrachtung derselben gehört aber nicht in eine in die Mathematik einleitende Lehre, sondern in denienigen Theil dieser Wissenschaft selbst, den man Geometrie zu nennen pflegt, weswegen die noch weiter möglichen Betrachtungen über diese Formen hier übergangen werden.

§ 18.

Die bisher aufgefundenen Größenarten sind die Producte der verschiedenen uns ursprünglich eigenthümliche Formen des Vorstellens und Denkens einzelner Gegenstände als Größen und die Gesetze, an die wir uns dabey gebunden fühlen, sind die, daß wir uns nach den bisherigen Untersuchungen einzelne Größen nur in diesen und keinen andern und in sovielen und nicht in weniger Formen vorstellen und denken können.

Zur Erleichterung der Uebersicht der systematischen Eintheilung aller derjenigen möglichen formal verschiedenen Größenarten, die Producte des Einzelndenkens der Gegenstände als Größen sind, dient die diesem Werke beigefügte Tabelle I.

§ 19.

Nehmen wir die bisher systematisch aufgesuchten Formen, worin wir uns einzelne Gestände als Größen denken können, weiter in Betrachtung und erwägen, ob sich auch jede Größe, die in irgend einer der vorerwähnten Formen als eine aus indiscreten Theilen bestehende vorgestellt ist, als eine solche, die aus discreten und gleichartigen Theilen besteht, also als Quantum, denken lasse, so ergiebt sich unmittelbar dieses:

Tab. I, zu § 18.

Tabelle der Producte

aller

möglichen Formen des Einzelndenkens der

Gegenstände als Groeßen.

Die formal verschiedenen Groeßenarten sind:

- 1) Größen mit discreten gleichartigen Theilen oder Quanta. (§ 9, Nr. 1).
  - A) Unbenannte (§ 11, Nr. 1, A).
    - a) Unbestimmte.
    - b) Bestimmte. (§ 11, Nr. 2).
  - B) Benannte (§ 11, Nr. 1, B).
    - a) Unbestimmte.
    - b) Bestimmte.
      - A) Unterbrochene. (§ 9 und 11, Nr. 3).
      - B) Ununterbrochene.
- 2) Größen mit indiscreten Theilen. (§ 9, Nr. 2).
  - A Größen der Extension (§ 13, Nr. 1).
    - a) Expansive (§ 13, Nr. 3).
      - A) Körper (§ 15, Nr. 1).
        - a) Solche, die nur von ebenen Flächen und geraden Linien begränzt sind;
        - b) solche, die ganz oder zum Theil von gebogenen Flächen und krummen Linien begränzt sind.
        - U. s. w. (§ 17).
      - B) Körpergränzen (§ 15, Nr. 2).
        - a) Linien (§ 16, Nr. 1, A).
          - aa) Gerade.
          - bb) Krumme.
            - aaa) Gesetzmäßige;
            - bbb) ungesetzmäßige.
            - U. s. w. (§ 17).
        - b) Flächen (§ 16, Nr. 1, B).
          - aa) Ebene.
          - bb) Gebogene.
          - U. s. w. (§ 17).
    - b) Protensive (§ 13, Nr. 3).
  - B) Größen der Coalition (§ 13, Nr. 2).

„In ieder mit indiscreten Theilen vorge„stellten Größe kann man iede Art von sol„chen Theilen, die sich durch bestimmte „Merkzeichen unterscheiden und nach diesen „durch einen bestimmten Begriff denken „lassen, zu Einern dieser Größe annehmen „und sich die Größe nach diesen Einern „als ein aus ihnen bestehendes Quantum „denken."

3. B. Wir können in Linien gewisse gleichartige Theile oder Einer derselben unterscheiden, können diese Theile durch einen sie unter sich fassenden Begriff auffassen und uns die Linien nach diesen Theilen als Quanta denken. Das thun wir, wenn wir Linien nach Zollen, Fußen, Ellen ꝛc. ꝛc. eintheilen und ausmessen.

Desgleichen können wir uns auch Flächen in bestimmte Theile eingetheilt und sie nach diesen als Quanta denken. Das ist der Fall bey der Fläche des Schachbretes, der Fläche eines Stückes Land, die wir uns in Quadratruthen, in Morgen oder Hufe ꝛc. ꝛc. eingetheilt und als ein aus solchen Einern bestehendes Quantum denken. (Wie man hier bey unregelmäßig begränzten Flächen die Quantität zu bestimmen habe, das lehrt die Geometrie.)

So können wir auch Körper nach bestimmten Theilen derselben als Quanta denken. Das thun wir, wenn wir uns eine Mauer oder ein Holzstück oder irgend einen Raumtheil als eine Menge von Cubikfußen, ein Faß Wein als eine Menge von Weinmaaßen ꝛc. ꝛc. denken.

Ferner können wir uns auch jeden Zeitraum nach bestimmten Zeittheilen als ein Quantum denken. Das thun wir, wenn wir diesen in Jahre, Tage, Stunden ꝛc. ꝛc. eingetheilt und aus solchen Einern bestehend denken.

Endlich können wir uns auch die Größen der Coalition nach bestimmten Theilen als Quanta denken. Das

thun wir, wenn wir uns den Druck, den ein Gewicht gegen eine Fläche ausübt, als eine Menge von Pfunden, wenn wir uns die Beleuchtung einer Stube aus bestimmten Beleuchtungsgraden, die Wärme derselben aus bestimmten Wärmegraden zusammengesetzt denken.

§ 20.

Hiermit stehen folgende Begriffe und Benennungen in Verbindung:

1) Wenn wir in einer mit indiscreten Theilen vorgestellten Größe einen bestimmten Theil derselben als Einer annehmen und uns die Größe als ein aus solchen Einern bestehendes Quantum denken, so wird ein solcher Einer das Maaß (mensura) der Größe genannt. Maaß ist also ein Einer und zwar ein solcher, wornach eine aus indiscreten Theilen bestehende Größe als Quantum gedacht wird. Bey Quantis, die man aus discreten und unterbrochenen Theilen zusammensetzt, z. B. bey einer Truppe Menschen, einem Zuge Vögel ꝛc. ꝛc. pflegt man die Einer nicht durch das Wort Maaß zu bezeichnen.

2) Die Handlung, die darin besteht, daß man für eine aus indiscreten Theilen bestehende Größe einen bestimmten Theil derselben als Einer oder Maaß annimmt und aufsucht, in welcher Vielheitsform oder Zahl die Größe rücksichtlich dieses Maaßes als bestimmtes oder gezähltes Quantum gedacht werden muß, bezeichnet man durch die Wörter Messen, Aus-

messen (metiri). In Fällen, in welchen man die Quantität einer Größe nicht genau anzugeben vermag und sie daher nur oberflächlich oder nährungsweise (approximativ) bestimmt, sagt man, daß man die Größe schätze. Bey unterbrochenen Quantis wird, wie schon vorn bemerkt worden ist, die Bestimmung ihrer Quantität vornehmlich durch das Wort Zählen bezeichnet, man braucht aber doch auch das Wort Messen bey ihnen. Man zählt den Geldhaufen nach Gulden und mißt den Kornhaufen nach Metzen.

§ 21.

Weil sich die Form, wodurch Größen als Quanta gedacht werden, bey ieder Art von Größen, die noch nicht als Quanta gedacht sind, anwenden und sich also iede aus indiscreten Theilen bestehende Größe als ein Quantum denken läßt; so ist diese Form eine für alle und iede Größenarten gültige oder kurz, eine allgemeine Form des Denkens der Gegenstände als Größen.

Diesem nach hat man die bisher systematisch in Betrachtung genommenen Größenformen in zwey Gattungen abzutheilen, wovon die erste die zwey allgemeinen Größenformen, in welchen Gegenstände entweder nur schlechthin nach beliebigen Theilen als Größen, oder nach Einern als Quanta gedacht werden, die zweite Gattung aber die verschiedenen be-

sonderen vorhin angegebenen Größenformen in sich begreift. Der Grund dieser Eintheilung und die Eintheilung selbst gehört ebenfalls zu den Gesetzen, an die sich unser Geist in seiner Thätigkeit des Denkens der Gegenstände als Größen gebunden fühlt.

IV.

Formen, Producte, Gesetze

des Miteinanderdenkens mehrerer Größen.

§ 22.

Verfolgen wir unsere Untersuchung weiter, stellen nunmehr auch besondere Betrachtungen über die in § 5. erwähnte Geistesthätigkeit, die im Miteinanderdenken mehrerer Größen besteht, an und forschen nach den verschiedenen Formen, Producten und Gesetzen derselben, so finden wir hier zuvörderst, daß wir diese Untersuchungen systematisch in zwey Abtheilungen zu spalten haben, wie aus Folgendem erhellet.

1) Weil wir uns nach vor. Sphen einzelne Gegenstände in zwey allgemeinen Größenformen, entweder als Größen schlechthin oder als Quanta, und auch in beson-

dern Größenformen, entweder als räumlich oder zeitlich extensive, oder als intensive Größen denken können; so ist ist offenbar, daß auch mehrere miteinander gedachte Größen entweder nur allgemein als Größen schlechthin oder als Quanta, oder als besondere Arten von Größen, als extensive oder intensive Größen, gedacht seyn können und daß daher bey den hier anzustellenden Untersuchungen zuvörderst auf diese Unterscheidung Rücksicht genommen werden muß. Es ist also nöthig, daß wir

A) diejenigen Formen, Producte und Gesetze des Miteinanderdenkens mehrerer Größen in Betrachtung nehmen, welche Statt haben, wenn die Größen nur schlechthin als Größen oder Quanta und nicht als besondere Arten von Größen gedacht werden, welche Formen, Producte und Gesetze wir allgemeine zu nennen haben, und zwar deswegen, weil sie für alle und jede Arten von Größen gelten müßen; hierauf müßen

B) diejenigen Formen, Producte und Gesetze des Miteinanderdenkens mehrerer Größen in Betrachtung genommen werden, die Statt haben, wenn die Größen als besondere Arten, als räumlich oder zeitlich extensive, oder als intensive Größen gedacht werden, welche Formen, Producte und Gesetze, weil sie besondere Arten von Größen betreffen, besondere zu nennen sind.

I.

Allgemeine
Formen, Producte, Gesetze
des Miteinanderdenkens mehrerer Größen.

§ 23.

Es kommen uns mehrere gänzlich von einander verschiedene allgemeine Formen zu, worin wir uns Gegenstände jeder Art als Größen schlechthin oder als Quanta mit einander denken und dadurch gewiße Producte erzeugen können und wobey wir uns an bestimmte Gesetze gebunden fühlen.

Z. B. Wir denken uns eine Menge M beliebiger Gegenstände mit einer andern Menge M′ eben solcher Gegenstände in der Form, daß wir die M′ mit der M vergleichen, und erzeugen in dieser Form unseres Denkens der M mit der M′ ein Product, welches in einer beziehlichen (relativen) Bestimmung, oder, wie man zu sagen pflegt, in einem Verhältnisse der M′ zu der M, besteht, daß nämlich die M′ eine solche Menge ist, die eben so viele, oder eine solche, die mehr, oder eine solche, die weniger Einer hat, als die ihr gleichartige M — Wir denken uns ferner eine Menge M mit einer andern ihr gleichartigen M′ in der von der vorigen gänzlich verschiedenen Form, daß wir beide Mengen zusammen fassen zu einer dritten Menge 𝔐, und erzeugen in die-

ser Form unseres Denkens der beiden Mengen M und M′ ein Product welches nicht, wie vorhin, eine beziehliche Bestimmung, ein Verhältniß einer Größe M′ zu einer andern M, sondern eine aus den Größen M und M′ erzeugte Vereinigungsgröße 𝔐 ist. — Wir denken uns ferner M mit zwey Theilen m und m′, woraus M zusammengesetzt ist, in Verbindung, nehmen den einen m von M weg und erzeugen dadurch den andern Theil m der M, welche Form des Miteinanderdenkens mehrerer Größen wiederum eine andere ist, als jede der beiden in den vorigen Beispielen angewendeten Formen, deren Product kein Verhältniß der M′ zu der M, auch keine aus M und M′ erzeugte Vereinigungsgröße 𝔐, sondern eine aus M und m erzeugte Theilgröße m′ der M ist.

Diese Beispiele, denen noch sehr viele andere beigefügt werden könnten, sind zur Bestätigung des obigen Satzes vollkommen zureichend.

§ 24.

Weil uns verschiedene allgemeine Formen eigenthümlich sind, worin wir uns mehrere Größen jeder Art als Größen schlechthin oder als Quanta miteinander denken und verschiedene Producte dieses Denkens, z. B. Verhältnisse, Größen 2c. 2c. erzeugen können; so ist es nöthig, daß diese Formen systematisch aufgesucht, nach ihnen die verschiedenen Hauptarten der in ihnen erzeugbaren Producte eingetheilt und dabey zugleich auch die Gesetze gehörig erwogen werden, an die sich unser Geist in dieser seiner Thätigkeit gebunden fühlt.

§ 25.

Wir unternehmen diese Untersuchung und finden durch sie zuvörderst, daß uns ursprünglich zwey oberste einander entgegengesetzte allgemeine Formen des Miteinanderdenkens mehrerer Größen oder Quanta eigenthümlich sind und daß mithin auch zwey oberste Gattungen von Producten dieser unserer Thätigkeitsformen Statt haben.

A) Wir denken uns mehrere Größen oder Quanta mit einander in der Form, daß wir sie gewissen

Vergleichungsweisen (modis comparationis)

unterwerfen und dadurch gewisse Producte erzeugen, welche sind:

Verhältnisse zwischen Groeßen oder Quantis.

Z. B. Wir denken uns eine Menge M von Dingen mit einer zweiten Menge M′ von Dingen zusammen, vergleichen die M′ mit der M entweder rücksichtlich der Einer und finden dabey die relative Bestimmung der M′ rücksichtlich der M, oder das Verhältniß der M′ zur M, daß die M′ der M gleichartig oder ungleichartig ist: oder wir vergleichen die M′ mit der M rücksichtlich der Vielheit der Einer und finden dabey das Verhältniß der M′ zur M, daß die M′ der M gleichzählich oder ungleichzählich ist; u. s. w.

B) Wir denken uns auch mehrere Größen oder Quanta in der Form, daß wir sie gewissen Bildungsweisen (modis formationis) unterwerfen und dadurch gewisse Producte erzeugen, welche sind:

Erzeugnisse aus Groeßen.

z. B. Wir denken uns mehrere Größen oder Quanta mit einander und unterwerfen sie derjenigen Bildungsweise, daß wir aus ihnen ein Product erzeugen, welches nur eine Größe ist, und zwar entweder durch Vereinigung der mehreren mit einander gedachten Größen oder Quanta zu einer Größe, welche die ersteren insgesammt in sich begreift, oder durch Zerlegung einer der miteinander gedachten Größen durch die andere Größe. Oder wir unterwerfen die mehreren mit einander gedachten Größen oder Quanta derjenigen Bildungsweise, daß wir aus ihnen ein Product erzeugen, welches nicht blos eine Größe, sondern welches eine Zusammenstellung aus mehreren Größen, und zwar entweder eine solche ist, worin die unter einander in Verbindung gesetzten Größen in keinem Zusammenhange wechselseitiger Abhängigkeit von einander stehen, oder worin ein solcher Zusammenhang Statt findet.

§ 26.

Daß uns geistesgesetzmäßig nur die vorgenannten zwey obersten allgemeinen Formen des Miteinanderdenkens mehrerer Größen zukommen, das wird thatsächlich offenbar, wenn wir uns die Beantwortung folgender Frage zur Aufgabe machen:

„Worin besteht denn das, was du in deiner „durch das Wort denken bezeichneten Gei„stesthätigkeit mit zwey von dir vorgestellten „Gegenständen A und B vorzunehmen vermagst?"

Wir finden bey gehörigem Nachdenken über die einzig wahre Antwort auf diese Frage, daß sie nothwendig in Folgendem bestehen muß:

„Du kannst, wenn du A und B deiner Denk„thätigkeit unterwirfst, durch diese deine Thä„tigkeit weiter nichts hervorbringen, als re„lative Bestimmungen, Verhältnisse, „die dem B in Beziehung auf A oder v. v. „zukommen, oder ein Product C, welches „aus A und B auf irgend eine Weise gebil„det ist."

§ 27.

Weil uns die beiden in § 25. angegebenen obersten allgemeinen Formen des Miteinanderdenkens mehrerer Größen, wodurch wir in dieser unserer Denkthätigkeit die beiden dort genannten Productgattungen hervorbringen, ursprünglich eigenthümlich sind, so ist nun weiter in Untersuchung zu nehmen, ob Modificationen dieser Denkformen und ihrer Producte Statt haben und welche sie sind, weswegen der systematische Gang der weiter folgenden Untersuchungen die Abtheilungen derselben gerade so erfordert, wie sie nun folgen.

A.

Von den bey mit einander gedachten Größen vornehmbaren Vergleichungsweisen, wodurch Producte, die Verhältnisse zwischen Groeßen sind, erhalten werden, und den Hauptarten dieser Verhältnisse.

§ 28.

Wenn wir erwägen, wie viel verschiedene Formen uns eigenthümlich sind, in welchen wir mit einander gedachte Größen oder Quanta unter einander vergleichen können, und wie viel daher Arten von Größenverhältnissen als Producte dieser Vergleichungsformen Statt haben müßen, so ergiebt sich Folgendes:

a) Wir können mit einander gedachte Größen derienigen Vergleichungsweise unterwerfen, welche die Seynsarten ihrer Theile oder, falls die Größen als Quanta gedacht sind, die Einer derselben betrifft. — Hierbey finden wir, daß folgende Arten von beziehlichen (relativen) Bestimmungen oder Verhältnissen, die einer mit einer Größe A verglichenen Größe B rücksichtlich

der Theile überhaupt oder der Einer besonders zukommen können, möglich sind:

A) Die auf die Größe A bezogene und mit dieser verglichene Größe B, die man das Relatum nennt, kann aus Theilen überhaupt oder aus Einern bestehen, die eben solche Gegenstände sind, wie die Theile oder Einer der Größe A, welche man das Correlat nennt.

In diesem Falle sagt man von B in Bezug auf A, die B sey der A gleichartig und nennt die beiden Größen gleichartige.

Es kann aber auch das Gegentheil des hier angegebenen Falles Statt haben und dann werden die Größen ungleichartige genannt.

B) Erwägen wir bey den ungleichartigen Größen, ob wir uns auch zwey einander entgegengesetzte Arten der Ungleichartigkeit ihrer Theile oder Einer denken können, so finden wir dieses:

a) Wir können uns Größen denken, deren Theile oder Einer auf die Weise ungleichartig sind, daß die Größen beisammen bestehen können, ohne daß ihr Beisammmensein eine wechselseitige Verminderung oder gänzliche Aufhebung der einen Größe durch die andere oder einer Würkung der einen durch eine Würkung der andern zur Folge hat. Das ist z. B. der Fall, wenn wir uns eine Goldstange und eine Silberstange, 6

Duca-

Ducaten und 5 Louisd'or, 6 Fl. Vermögen und 4 Thlr. Vermögen, 4 Pf. auf der rechten Schale einer Waage und 8 Lothe auf derselben Waagschale denken. Dergleichen ungleichartige Größen nennt man einstimmige. —

b) Es kann aber auch das Gegentheil des hier angegebenen Falles Statt haben. Das ist z. B. der Fall, wenn wir uns 1 Fl. Vermögen und 1 Fl. Schuld, oder 6 Fl. Schuld und 4 Fl. Vermögen ein und derselben Person denken, denn diese beiden Größen bestehen auf die Weise neben einander, daß die eine die andere gänzlich aufhebt oder doch vermindert; das ist ferner auch der Fall, wenn wir uns irgend ein unbestimmtes oder ein bestimmtes Gewicht, z. B. 6 Pf., auf der einen und desgleichen auch irgend ein Gewicht auf der andern Schale derselben Waage denken, denn diese beiden Größen bestehen auf die Weise neben einander, daß sie einander zwar nicht selbst, aber doch in ihren Würkungen, den Bestrebungen der beiden Schenkel des Waagbalkens nach Bewegung, wechselseitig vermindern oder gänzlich aufheben. — Dergleichen ungleichartige Größen werden entgegengesetzte genannt.

C) Resultate: Dem Bisherigen zufolge sind die verschiedenen möglichen relativen Bestimmungen oder Verhältnisse mit einander gedachter Größen, die sich ergeben, wenn wir die Größen rücksichtlich ihrer Theile

oder Einer unter einander vergleichen, Gleichartigkeit und Ungleichartigkeit und zwar besteht die letztere entweder in Einstimmigkeit oder in Entgegengesetztheit. Also sind miteinandergedachte Größen rücksichtlich der Verhältnisse ihrer Theile oder Einer entweder

A) gleichartige oder B) ungleichartige und zwar

entweder a) einstimmige
oder b) entgegengesetzte.

b) Wir können aber auch mit einander gedachte Größen einer Vergleichungsweise unterwerfen, die nicht ihre Theile oder Einer selbst, sondern das Bestehen der Größen aus Theilen oder Einern, das Großseyn oder Vielseyn, die Größe oder Quantität der Größen betrifft. — Hierbey finden wir, daß folgende Arten beziehlicher Bestimmungen oder Verhältnisse einer mit einer Größe A verglichenen Größe B Statt haben können.

A) Wenn die beiden Größen nicht als Quanta, sondern nur als extensive oder intensive Größen gedacht werden. — Von zwey solchen Größen A und B kann der B dieselbe Extension oder Intension zukommen, die der A zukommt, und in solchem Falle sagt man von der B in Bezug auf die A, daß sie dieser gleich sey, und nennt die beiden Größen gleiche.

Es kann aber auch das Gegentheil des hier angegebenen Falles Statt haben und dann werden die beiden Größen ungleiche genannt. — Dieses Verhältniß der Ungleichheit zweier Größen A und B kann ferner wieder in zwey verschiedenen Formen gedacht werden.

a) Auf die Weise, daß man den Unterschied (Differentia) denkt, um welchen das Relatum B größer oder kleiner ist, als das Correlatum A; oder

b) auf die Weise, daß man sich die Wievielheitsform (das Quoties) denkt, wie oft das Relatum B das Correlatum A oder gewisse Theile desselben enthält.

B) Wenn die beiden Größen als Quanta gedacht werden. — Bey solchen zwey Größen kann die beziehliche ihre Quantität betreffende Bestimmung, das Quantitätsverhältniß derselben, seyn: Gleichvielheit und Ungleichvielheit. Wenn nun bey solchen Quantis:

a) Gleichvielheit ihrer Einer Statt findet, so können die Einer gleichartige und ungleichartige seyn. Gleichartige Quanta, bey welchen Gleichvielheit der Einer Statt hat, nennt man gleiche; ungleichartige Quanta aber, bey welchen Gleichvielheit ihrer Einer Statt hat, sind gleichzählige zu nennen; z. B. 3 Fl. und 3 Fl. sind gleiche, aber 3 Fl. und 3 Kr. sind nur gleichzähliche Quanta. — Wenn ferner

b) Ungleichvielheit der Einer der Quanta Statt findet, so nennt man sie überhaupt, sie mögen gleichartig oder ungleichartig seyn, ungleich. — Bey gleichartigen ungleichen Quantis läßt sich das Ungleichheitsverhältniß derselben ebenfalls in den zwey verschiedenen in vor. Nr. A angegebenen Formen a und b denken.

C) Resultate: Dem Bisherigen zufolge sind die verschiedenen möglichen relativen Bestimmungen oder Verhältnisse mit einander gedachter Größen, die sich ergeben, wenn wir diese rücksichtlich ihres Großseyns oder ihrer Quantität vergleichen, diese: Bey den extensiven und intensiven Größen bestehen diese Verhältnisse in Gleichheit und Ungleichheit dieser Größen, nach welchen die Größen selbst entweder gleiche oder ungleiche genannt werden, und wenn das Verhältniß der Ungleichheit Statt findet, so kann dieses entweder nach einer Differenz oder nach einem Quotienten zwischen A und B gedacht werden. — Bey den als Quanta gedachten Größen bestehen diese Verhältnisse, ienachdem die Quanta gleichartige oder ungleichartige sind, entweder in Gleichheit oder nur in Gleichzähligkeit und in Ungleichheit, nach welchen die Quanta selbst gleiche oder gleichzählige und ungleiche genannt werden. Sind die ungleichen Quanta gleichartig, so ist ihr Verhältniß der Ungleichheit eben-

falls entweder nach einer Differenz oder nach einem Quotienten denkbar.

§ 29.

Bey den im vor. Sphen angegebenen Vergleichungsweisen mit einander gedachter Größen und den verschiedenen aus diesen hervorgehenden Arten von Verhältnissen zwischen Größen fühlen wir uns an das Gesetz gebunden, daß wir die Vergleichungen der Größen und die Bestimmungen der möglichen Verhältnisse derselben nur so vornehmen können, wie sie im vor. Sphen angegeben worden sind.

B.

Von den bey mit einander gedachten Größen vornehmbaren Bildungsweisen, wodurch Producte, die Erzeugnisse aus Groeßen sind, erhalten werden, und den Hauptarten dieser Erzeugnisse.

§ 30.

Nehmen wir in Untersuchung, wie viel verschiedene Formen uns eigenthümlich sind, worin wir aus mit einander gedachten Größen gewisse Producte hervorbringen können, die keine Verhältnisse zwischen Größen, sondern Pro-

ducte aus Größen oder Größenerzeugnisse sind, so ergiebt sich Folgendes:

a) Wir können aus mit einander gedachten Größen Producte bilden, welche

einzelne aus andern Groeßen gebildete Groeßen

sind, die wir formirte nennen und solchen Größen entgegensetzen, die nur schlechthin als Größen oder Quanta gedacht und daher simple Größen genannt werden.

Z. B. Wir können uns mehrere mit einander gedachte Größen zu einer Größe, welche die ersteren in sich begreift, vereinigt denken; wir können uns ferner von mit einander gedachten Größen eine derselben nach einer zweiten in Theile zerlegt denken, also aus einer Größe eine andere Größe als einen Theil derselben bilden.

b) Wir können aber auch aus mit einander gedachten Größen Producte bilden, die nicht blos einzelne aus andern Größen formirte Größen, sondern die

Zusammenstellungen aus mehreren simplen oder formirten Groeßen

sind und die wir daher Groeßenzusammenstellungen nennen.

Z. B. Wir können uns mehrere Größen, einen Ducaten a, einen Laubthlr. b und einen preuß. Thl. c zusammengestellt denken in gewissen Reihenordnungen abc oder bca 2c. 2c. Wir können uns ferner mehrere Größen zusammengestellt denken nach gewissen bestimmten Verhältnissen der Ungleichheit

oder Gleichheit; wir können setzen, es solle mit einer simplen Größe a eine zweite aus ihr formirte Größe b zusammengestellt und zwar solle b aus a formirt seyn auf die Weise, daß b die a und noch eine Größe d in sich enthält; wir können ferner setzen, es sollen mit einer simplen Größe a formirte Größen b, c, d ꝛc. ꝛc. dergestalt zusammengestellt seyn, daß b um ein d, c um zwey d, d um drey d, u. s. f. größer sey, als a, daß also die Größen a, b, c, d ꝛc. ꝛc. fortgesetzt um dieselbe Differenz d wachsen; wir können ferner setzen, es solle eine aus simplen Größen a, b, c ꝛc. ꝛc. formirte Größe einer andern simplen oder formirten Größe gleich seyn, es solle z. E. das Doppelte einer Größe a um eine Größe b vermehrt so groß seyn, als eine vorgegebene simple Größe c, oder so groß, als die aus b formirte Größe 2b.

§ 31.

Daß uns geistesgesetzmäßig nur die zwey vorerwähnten Bildungsweisen, denen wir mit einander gedachte Größen unterwerfen können, und nicht mehr oder weniger solcher Bildungsweisen eigenthümlich sind, das wird thatsächlich offenbar, wenn wir uns die Beantwortung folgender Frage vorlegen:

„Worin besteht denn das, was du mit mehreren mit einander gedachten Größen, die du nicht blos unter einander vergleichen, sondern woraus du etwas bilden willst, vorzunehmen vermagst?"

Bey gehörigem Nachdenken über die richtige Beantwortung dieser Frage ergiebt sich,

„daß wir aus mehreren mit einander gedach-
„ten Größen weiter nichts zu bilden vermö-
„gend sind, als eine formirte Größe
„oder eine Zusammenstellung mehre-
„rer simpler oder formirter Größen."

a.

Von den bey mit einander gedachten Größen vornehmbaren Bildungsweisen, wodurch Producte, die formirte Groeßen sind, erhalten werden, und von den Hauptarten dieser Größen.

§ 32.

Erwägen wir nun weiter, wie viel wir verschiedene Hauptformen des Bildens solcher Producte aus Größen, die formirte Größen sind, aufweisen können, so ergiebt sich zuvörderst dieses:

A) Wir können aus mit einander gedachten Größen formirte Größen bilden durch Vereinigung (Synthesis) der erstern Größen zu einer solchen Größe, welche die ersteren als Erzeugungselemente in sich vereinigt enthält und die deswegen eine Vereinigungsgröße zu nennen ist.

B) Wir können aber auch umgekehrt aus mit einander gedachten Größen formirte

Größen bilden durch Zerlegung (Analysis) einer dieser Größen nach einer andern von ihnen in eine Größe, die aus der erstern als ein ihr zugehörendes Element ausgehoben und die deswegen eine Zerlegungsgröße genannt wird.

§ 33.

Daß uns geistesgesetzmäßig nur diese zwey einander entgegengesetzten Formen des Bildens der Größen aus andern zukommen, das ist eine Thatsache, die keiner weiteren Untersuchung bedarf. Daher können auch in dieser Rücksicht die geformten Größen nur von doppelter Art, nämlich Vereinigungsgrößen oder Zerlegungsgrößen seyn. Da wir aber die beiden vorerwähnten Bildungsformen bey mit einander gedachten Größen verbunden anwenden können, so ergiebt sich, daß noch eine dritte Art formirter Größen möglich ist, welche Vereinigungs- und Zerlegungsgrößen zugleich sind. Deswegen hat man die formirten Größen in zwey Gattungen, in einfachformirte, die entweder blose Vereinigungs- oder blose Zerlegungsgrößen sind, und in zusammengesetztformirte, bey welchen Vereinigung und Zerlegung zugleich angewendet ist, einzutheilen.

A.

Das Bilden formirter Größen durch Vereinigung mit einander gedachter Größen

§ 34.

Wenn wir untersuchen, ob uns verschiedene Formen des Vereinigens mehrerer Größen zu einer Vereinigungsgröße zukommen, so finden wir Folgendes:

a) Wir können uns ungleiche Größen mit einander vereinigt denken zu einer Vereinigungsgröße. Diese Vereinigungsweise nennt man Addition (Additio), die vereinigten ungleichen Größen werden Posten oder Glieder (Termini) genannt und die aus ihnen erzeugte Vereinigungsgröße wird, weil sie aus ungleichen Größen erzeugt ist, vorzugsweise durch das Wort Summe (Summa) bezeichnet.

b) Wir können uns aber auch gleiche Größen mit einander vereinigt denken zu einer Vereinigungsgröße. Diese Vereinigungsweise wird gedacht als eine Vervielfältigung (Multiplicatio) ein und derselben Größe und wird daher auch durch

dieses Wort bezeichnet. Hierbey wird der zu vervielfältigende Posten das Multiplicandum und die Vielheitsform, in welcher gedacht wird, wie oft dieser Posten vervielfältigt werden soll, Vervielfältiger oder Multiplicator genannt. Multiplicandum und Multiplicator nennt man zusammengenommen Erzeuger oder Factores (Factores) der Vereinigungsgröße und letztere wird, weil sie aus gleichen Posten erzeugt ist, vorzugsweise Product genannt. Von den beiden Factoren dieses Productes nennt man auch den Multiplicator den Mitfactor oder Coëfficienten, weil er mit dem Multiplicandum verbunden das Product erzeugt.

Ein aus einem Multiplicandum M und einem Multiplicator m erzeugtes Product m mal M können wir uns abermals durch einen Multiplicator n vervielfältigt denken, wodurch das Product n mal m mal M entsteht. Auch dieses aus drey Factoren erzeugte Product können wir uns wieder durch einen Factor p vervielfältigt denken, und so können wir offenbar nach Belieben Producte aus einer beliebigen Anzahl von Factoren bilden.

Bey diesen können wir uns nun die Factoren:

aa) als ungleich denken. In diesem Falle bezeichnet man die Operation vorzugsweise durch das Wort Vervielfältigung oder Multiplication und behält auch die bereits angegebenen übrigen Benennun-

gen bey; wir können uns aber auch alle Factoren

bb) als gleich denken. In diesem Falle bezeichnet man die Operation durch das Wort Erhöhung oder Erhebung (Elevatio) und auch durch das Wort Potenzirung. Die hierbey mehrmals als Factor gebrauchte Größe wird hier besonders durch das Wort Wurzel (radix) bezeichnet und die aus ihr gebildete Vereinigungsgröße wird ihre Potenz (Potentia) oder Dignität (Dignitas) genannt; die Zahl, die anzeigt, wie oft die Größe als Factor gebraucht seyn soll, nennt man Exponent.

§ 35.

Dem Bisherigen zufolge ist die kurze Darstellung der verschiedenen Formen des Vereinigens mit einander gedachter Größen und der aus diesen hervorgehenden verschiedenen Arten der Vereinigungsgrößen diese:

a) Addition oder Vereinigung ungleicher Posten, deren Erzeugnisse Summen heißen;

b) Multiplication im weitesten Sinne oder Vereinigung gleicher Posten, deren Erzeugnisse Producte heißen. Diese ist ferner

aa) Multiplication im engsten Sin-

ne oder Vereinigung ungleicher Factoren, deren Erzeugnisse Producte im engsten Sinne genannt werden;

bb) Potenzirung oder Vereinigung ungleicher Factoren, deren Erzeugnisse Potenzen oder Dignitäten heißen.

B.

Das bilden formirter Größen durch Zerlegung einer von den mit einander gedachten Größen nach einer andern.

§ 36.

Erwägen wir weiter, ob uns auch verschiedene Formen des Zerlegens einer Größe nach einer andern in eine Zerlegungsgröße zukommen, so ergiebt sich Folgendes:

a) Wir können uns eine Größe zerlegt denken nach einer andern in ungleiche Zerlegungsgrößen. Diese Zerlegungsweise ist Gegensatz der Addition und man nennt sie Subtraction (Subtractio), weil sie dadurch geschieht, daß man eine gegebene Größe von der zu zerlegenden wegnimmt oder abzieht. Die Größe, welche man zerlegt, wird, weil diese um eine angegebene Größe vermindert werden muß, die zu verringernde Größe

(Minuendum) genannt; die gegebene Größe, die man von dem Minuendum wegnimmt, nennt man die wegzunehmende (Subtrahendum) und auch den Subtractor; die Zerlegungsgröße endlich, die man durch diese Operation aus dem Minuendum erhält, nennt man Rest (Residuum) und auch Unterschied zwischen dem Minuendum und Subtrahendum (Differentia).

b) Wir können uns aber auch eine Größe zerlegt denken nach einer andern in gleiche Zerlegungsgrößen und diese Zerlegungsweise kann von verschiedener Art, und zwar deswegen seyn, weil wir uns nach § 34. u. 35. die zu zerlegende Größe als ein Product aus ungleichen Factoren (als Product im engsten Sinne), aber auch als ein Product aus gleichen Factoren (als Potenz) denken und für iede dieser zwey verschiedenen Vorstellungsweisen die Zerlegung der zur zerlegenden Größe verlangen und weil wir ferner auch die Größe, nach welcher die zu zerlegende Größe zerlegt werden soll, auf verschiedene Weise geben können.

aa) Wenn die zu zerlegende Größe als ein Product aus ungleichen Factoren gedacht wird. — Denkt man sich eine zu zerlegende Größe auf diese Weise, giebt dazu eine Größe, nach welcher die Zerlegung der ersteren geschehen soll und nimmt nach dieser die

Zerlegung in gleiche Theile oder Posten vor, so nennt man diese Zerlegung, die der Gegensatz der Multiplication im engsten Sinne ist, Eintheilung oder Division (Division) und die zu dividirende Größe wird Dividendum genannt. Da dieses Dividendum als ein Product aus wenigstens zwey ungleichen Factoren gedacht wird und von diesen einer als der in dem Dividendum enthaltene vervielfältigte Posten (Multiplicandum), der andere aber als die Vielheitsform dieses Postens (Multiplicator) zu denken ist, von diesen beiden Factoren aber sowohl der eine als auch der andere für die Zerlegung des Dividendums vorgegeben werden kann; so sind folgende zwey Divisionsweisen zu unterscheiden:

aaa) Diejenige Divisionsweise, bey welcher nebst dem Dividendum der Theil oder Posten desselben, worein dieses getheilt werden soll, gegeben und nach der Vielheitsform desselben, welche angiebt, wie oft dieser Theil im Dividendum enthalten ist, gefragt wird. — Diese Divisionsweise wird die Ausmessung des Dividendums nach dem dazu vorgegebenen Theile desselben oder Demension (Demensio) genannt; den hierzu vorgegebenen Theil oder Posten

des Dividendums nennt man **Maaß** (Mensura) und auch **Theiler** (Divisor); die hierbey **gesuchte Vielheitsform**, die anzeigt, **wie oft** der Divisor im Dividendum enthalten ist, heißt **Wieoftzahl** oder **Quotient** (Quotiens).

bbb) **Diejenige Divisionsweise**, bey **welcher nebst dem Dividendum** die **Anzahl der Theil oder Posten, worein dieses getheilt werden soll, gegeben und nach dem bey der hiernach vorgenommenen Division sich ergebenden Theile oder Posten gefragt wird.** — Diese Divisionsweise nennt man die **Vertheilung oder Partition** (Partitio); die hierzu vorgegebene **Anzahl der Theile** wird **Vertheilungszahl** (numerus partitionis) und auch **Eintheilungszahl** genannt und der nach dieser gesuchte **Theil oder Posten** heißt **ein sovielster oder aliquoter Theil** (pars aliquota).

bb) **Wenn die zu zerlegende Größe als ein Product aus gleichen Factoren, als eine Potenz, gedacht wird.**

Denkt man sich eine zu zerlegende Größe **auf diese Weise**, giebt dazu eine Größe, nach welcher die Zerlegung der erstern vorgenom-

nommen werden soll und nimmt nach dieser die Zerlegung der Potenz in gleiche Factoren vor, so nennt man diese Zerlegung, welche der Gegensatz des Potenzirens oder Erhöhens einer Größe ist, die Potenzenauflösung oder die Erniedrigung der Potenz.

Da jede Potenz als ein Erzeugniß aus zwey Elementen, einer Wurzel und einem Exponenten, welcher anzeigt, wie oft die Potenz die Wurzel als Factor in sich enthält, gedacht wird, von diesen zwey Elementen aber sowohl das eine, als auch das andere für die Zerlegung der Potenz vorgegeben werden kann; so sind folgende zwey Formen der Potenzenauflösung zu unterscheiden:

aaa) Diejenige Potenzenauflösungsweise, bey welcher nebst der aufzulösenden Potenz der Exponent, nach welchem diese als Potenz einer gewissen Wurzel gedacht und in diese Wurzel aufgelöst werden soll, gegeben und nach der Wurzel gefragt wird. — Diese Potenzenauflösungsweise nennt man das Wurzelausziehen (Extractio radicis).

bbb) Diejenige Potenzenauflösungsweise, bey welcher nebst der aufzulösenden Potenz die Wurzel, nach welcher diese als Potenz gedacht und worein sie aufgelöst werden soll, gegeben und nach dem zu dieser Potenz und

Wurzel gehörenden Exponenten gefragt wird. — Diese Potenzenauflösungsweise nennt man das Exponentiiren. — — Wenn man sich in der Reihe der Zahlen iede als eine Potenz von einer und derselben vorgegebenen Wurzel B denkt und dann für diese Wurzel B die den Zahlen zu gehörenden Exponenten, welche diese als Potenzen der B erklären, entweder ganz genau oder doch wenigstens näherungsweise bestimmt, so werden diese Exponenten Zähler der Potenzenverhältnisse zwischen den Zahlen und der Wurzel B oder Logarithmen genannt und das Exponentiiren der Zahlen für ein und dieselbe Wurzel B, die auch in diesem Falle Basis heißt, nennt man das Logarithmisiren.

§ 37.

Dem Bisherigen zufolge ist die kurze Darstellung der verschiedenen Formen des Zerlegens einer von mit einander gedachten Größen durch eine andere derselben und der aus diesen hervorgehenden Arten der Zerlegungsgrößen diese:

a) Subtraction oder Zerlegung in ungleiche Zerlegungsgrößen, deren Erzeugnisse Reste oder Differenzen sind;

b) Zerlegung in gleiche Zerlegungsgrößen; diese ist aber

aa) Division oder Zerlegung in gleiche Posten und zwar entweder

aaa) Demension oder bbb) Partition; oder diese Zerlegung ist

bb) Potenzenauflösung oder Zerlegung in gleiche Factoren, und zwar entweder

aaa) Wurzelausziehung oder bbb) Exponentiirung und Logorithmisirung.

b.

Von den bey mit einander gedachten Größen vornehmbaren Vergleichungsweisen, wodurch Producte, die Groeßenzusammenstellungen sind, erhalten werden, und von den Hauptarten solcher Producte.

§ 38.

Ziehen wir ferner auch in Erwägung, wie viel wir verschiedene Hauptformen des Bildens solcher Producte aus Größen, die Größenzusammenstellungen sind, aufweisen können, so ergiebt sich zuvörderst dieses:

a) Wir können Größenzusammenstellungen aus mit einander gedachten Größen bilden auf solche Weise, daß wir die mit einander gedachten Größen nur schlechhin zusammen stellen zu einer Größenzusammenstellung, worin

„erstlich keine wechselseitige Abhängigkeit der Größen von einander, „also kein organischer Zusammenhang zwischen den in der Größenzusammenstellung vorkommenden Größen dergestalt Statt hat, daß die Aenderung irgend einer von den eben genannten Größen nothwendig eine Aenderung wenigstens einer der übrigen bewürken muß, „sondern worin“

„zweitens blos die Anzahl und die „Raum- und Zeitordnung der in der „Größenzusammenstellung vorkommenden „Größen das specifische Wesen „dieses Productes ausmacht.“

Z. B. Wir können uns nur schlechthin zwey Größen a und b in der Ordnung ab oder ba, drey Größen a, b, c in der Ordnung abc oder acb ꝛc. ꝛc. vier Größen a, b, c, d in der Ordnung abcd oder abdc oder adbc u. s. f. zusammengestellt denken. In dergleichen Größenzusammenstellungen findet keine wechselseitige Abhängigkeit der einen von den zusammen gestellten Größen von den andern, also kein organischer Zusammenhang zwischen den Größen, Statt und das specifische Wesen derselben besteht blos in der

Anzahl und Ordnung der in ihnen zusammen gestellten Größen.

Das Bilden solcher Größenzusammenstellungen nennen wir die Aggregation der Größen und die Größenzusammenstellungen, die hierdurch erhalten werden, nennen wir unorganische und auch Größenaggregate.

b) Wir können aber auch Größenzusammenstellungen aus mit einander gedachten Größen auf die Weise bilden, daß wir die Größen nicht blos schlechthin zu einer Größenzusammenstellung zusammen setzen, welcher die in voriger Nr. a angegebenen Merkzeichen zukommen, sondern daß wir eine solche Zusammenstellung aus ihnen erzeugen, bey welcher die Gegensätze iener Merkzeichen Statt haben.

Z. B. Wir können setzen, es solle mit einer gewissen Große a eine Reihe von Größen zusammen gestellt seyn, von welcher iede folgende um eine gegebene Größe b größer oder kleiner ist, als die ihr zunächst vorhergegangene, oder — von welchen iede folgende gleichvielmal größer ist, als die zunächst vorhergehende, oder — von welchen iede folgende eine Summe aus Gliedern einer Reihe gegebener Größen a, b, c, d, e ꝛc. und zwar dergestalt gebildet ist, daß sie ein Reihenglied mehr in sich enthält, daß die nächst vorhergegangene Größe. — Wir können ferner setzen, daß eine aus Größen formirte Größe einer andern vorgegebenen simplen, oder formirten Größe gleich sey, daß z. B. der Unterschied zwischen zwey Größen c und d dem Unterschiede zwischen zwey Größen a und b gleich sey, oder

daß der Quotient zwischen c und d dem zwischen a und b gleich sey, oder daß das Doppelte einer Größe a um eine Größe b vermehrt einer vorgegebenen simplen Größe c oder formirten Größe 2 b gleich sey. — — In dergleichen Größenzusammenstellungen findet eine wechselseitige Abhängigkeit der einen Größe von der andern, ein organischer Zusammenhang zwischen den Größen, dergestalt Statt, daß eine Aenderung irgend einer der zusammen gestellten Größen oder eines Elementes derselben eine Aenderung einer oder mehrerer der übrigen Größen oder ihrer Elemente zur nothwendigen Folge haben muß.

Die Bildung solcher Größenzusammenstellungen nennen wir die Organisation derselben und die dadurch erzeugten Größenzusammenstellungen werden organische und auch Groeßensysteme genannt.

§ 39.

Daß uns geistesgesetzmäßig nur die zwey im vorigen Sphen angegebenen Hauptformen, worin wir uns Zusammenstellungen aus mehreren mit einander gedachten Größen denken können, zu kommen, das ist Thatsache, die keiner weitern Untersuchung bedarf. Es sind demnach die beiden im vorigen Sphen genannten Gattungen von Größenzusammenstellungen die einzig möglichen, welche sich denken lassen als solche, die nur durch eine der verschiedenen uns eigenthümlichen obersten Formen des Bildens der Zusammenstellun-

gen aus Größen gebildet sind, und jede Größenzusammenstellung, die nicht zu der einen oder andern der eben erwähnten zwey Gattungen gehört, kann keine andere seyn, als eine solche, bey deren Erzeugung von den beiden vorerwähnten Hauptformen des Zusammenstellens der Größen die eine mit der andern verbunden angewendet ist.

A.

Das Bilden solcher Größenzusammenstellungen, welche sind unorganische oder Groeßenaggregate.

§ 40.

Nehmen wir in Untersuchung, ob uns verschiedene Formen der Aggregation mehrerer mit einander gedachter Größen zu unorganischen Größenzusammenstellungen oder Größenaggregaten zukommen, so finden wir Folgendes:

a) Wir können aus mehreren mit einander gedachten Größen bilden nur ein Größenaggregat, können aber die Größen desselben, die man Elemente nennt, in verschiedenen Ordnungen im Raume und in der Zeit zusammenstellen oder folgen lassen.

Z. E. Aus den Größen a und b können wir bilden das Aggregat ab, können aber darin die Elemente in der Ordnung ab und auch in der Ordnung ba zusammen stellen. Die Größen a, b, c geben das Aggregat abc und es sind hier folgende verschiedene Ordnungen möglich: abc, acb, cab, bac, bca, cba.

Bey solchen Größenaggregaten können wir, wegen der verschiedenen möglichen Ordnungen, in welchen wir die Elemente derselben zusammenstellen können, nach der Anzahl dieser Ordnungen fragen, diese bestimmen und nach ihr das eine Größenaggregat in allen möglichen Ordnungen seiner Elemente darstellen. Die verschiedenen uns eigenthümlichen Formen, worin wir die Elemente eines aus mehreren Größen gebildeten Größenaggregates anders zusammenstellen können, nennt man Versetzungs- oder Permutationsformen, die in allen diesen Formen dargestellten Fälle der Aggregation der Elemente eines und desselben Größenaggregates nennt man Permutationen und das Bilden derselben wird das Permutiren genannt.

b) Wir können aber auch aus mehreren mit einander gedachten Größen bilden mehrere Größenaggregate und zwar solche, die einerseits rücksichtlich der Anzahl der in ihnen zusammen gestellten Größen und anderseits rücksichtlich der Größen selbst, die man zu ihnen zusammen nimmt, von einander unterschieden sind.

Z. B. Aus den vier Größen a, b, c, d können wir nur eine Zusammenstellung, welche

vier Größen enthält, aber mehrere Zusammenstellungen aus drey Größen, von welchen iede von der andern durch die in sie aufgenommenen Größen verschieden ist, und auch mehrere Zusammenstellungen aus zwey Größen, die sich durch die in sie aufgenommenen Größen von einander unterscheiden, bilden. Lassen wir aus den 4 Größen a, b, c, d iedesmal eine andere weg, so erhalten wir folgende vier verschiedene Zusammenstellungen aus drey Größen: abc, abd, acd, bcd; lassen wir aber aus a, b, c, d iedesmal zwey andere weg, so erhalten wir folgende sechs verschiedene Zusammenstellungen aus zwey Größen. ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Bey solchen Größenaggregaten können wir, wegen der verschiedenen Zahlen der Größen, die wir in sie aufnehmen, und der Verschiedenheit der ihnen zusammen gestellten Größen selbst, fragen, wie viel sich aus mehreren mit einander gedachten Größen verschiedene Zusammenstellungen, von welchen iede zwey Elemente enthält, wie viel sich ferner solche, von welchen iede drey Elemente in sich faßt, u. s. f. ausheben lassen. — Die verschiedenen uns eigenthümlichen Formen, worin wir aus mehreren Größen verschiedene Zusammenstellungen aus zwey, drey, vier ꝛc. ꝛc. Elementen bilden können, nennt man Combinationsformen; die in diesen dargestellten einer vorgegebenen Anzahl von Größen zugehörenden Zusammenstellungen heißen Combinationen und zwar, nach der Anzahl der Elemente derselben, Binionen oder Amben, Trinionen oder Ternen, Quaternionen oder

Quaternen ꝛc. ꝛc.; das Bilden dieser Combinationen nennt man das Combiniren.

c) Man kann bei den Combinationen zugleich auch auf die verschiedenen möglichen Ordnungen ihrer Elemente Rücksicht nehmen und sie nicht blos rücksichtlich der Verschiedenheit ihrer Elemente, sondern auch rücksichtlich der Stellung derselben darstellen. Die auf diese Weise gebildeten Combinatinen nennt man Variationen und das Darstellen derselben wird das Variiren genannt.

§ 41.

Daß wir nur die beiden bisher angegebenen Formen des Bildens verschiedener Gattungen und Arten von Größenaggregaten angeben können und nach diesen die durch sie erzeugbaren Aggregate auf die vorerwähnte Weise eintheilen und von einander unterscheiden müßen, das ist ein Gesetz unseres Geistes, an welches dieser in seiner Thätigkeit gebunden ist.

B.

Das bilden solcher Größenzusammenstellungen, welche sind organische oder Größensysteme

a.

Bestimmung der Hauptarten solcher Systeme.

§ 42.

Suchen wir nun auch auszumitteln, ob uns verschiedene Formen eigenthümlich sind, worin wir aus mit einander gedachten Größen solche Größenzusammenstellungen bilden können, in welchen ein organischer Zusammenhang zwischen den in die Größenzusammenstellungen aufgenommenen Größen Statt hat und die deswegen organische oder Größensysteme heißen, so finden wir Folgendes:

aa) Wir können simple und geformte Größen, die ungleiche und gleichartige Quanta sind, zu Größensystemen zusammenstellen.

z. B. Wir können uns mit einer simplen Größe oder einem simplen Quantum a ein dem a gleichartiges ungleiches geform-

tes Quantum b, welches um eine Differenz von a verschieden, oder welches emal größer oder kleiner, als a, ist, zusammen gestellt denken; wir können ferner auch mit a mehrere dem a gleichartige und ungleiche geformte Quanta b, c, d ꝛc., von welchen iedes folgende um dieselbe Differenz d, oder gleichvielmal größer oder kleiner, als das zunächst vorhergehende, ist, zusammen stellen; u. s. w. In den hier angegebenen Zusammenstellungen ungleicher gleichartiger Quanta sind die darin vorkommenden Größen deswegen von einander abhängig, weil darin die folgenden Größen aus den vorhergehenden nach einem bestimmten Gesetze erzeugt seyn sollen, weswegen die Veränderung irgend einer von den in der Zusammenstellung vorkommenden Größen nothwendig eine Veränderung der übrigen Größen erfordert, falls die bestimmte Form der Zusammenstellung nicht aufgehoben werden soll.

Organische Größenzusammenstellungen aus simplen und geformten gleichartigen Quantis, worin die Zusammenstellungsglieder ungleich sind, nennen wir, falls sie aus zwey Gliedern bestehen, Verhältnißausdrücke, wenn sie aber aus mehr, als zwey Gliedern, bestehen, so werden sie Reihen (Series) genannt und unter diesen heißen diejenigen, in welchen iedes folgende Glied um dieselbe Differenz oder auch gleichvielmal größer oder kleiner wird, als das ihm zunächst vorhergehende, Progressionsreihen oder Progressionen.

bb) Wir können aber auch, im Gegensatze des Vorigen, simple oder geformte Größen, die gleiche und gleichartige Größen oder Quante sind, zu Größensystemen zusammen stellen.

z. B. Wir können vier Größen a, b, c, d dergestalt, daß der Unterschied zwischen c und d dem Unterschiede zwischen a und b, oder so, daß der Quotient zwischen c und d dem Quotienten zwischen a und b gleich ist, zusammen stellen; wir können ferner zwey gleichartige Größen oder Quanta, von welchen eine die Summe aus a und b und die andere das Multiplicationsproduct aus b und c, also cmalb, ist, einander gleichsetzen; u. s. w. In den hier angegebenen Größenzusammenstellungen sind die darin vorkommenden Größen deswegen von einander abhängig, weil darin gesetzt ist, daß zwey verschieden geformte gleichartige Größen einander gleich seyn sollen, weswegen die Veränderung irgend einer von den in der Zusammenstellung vorkommenden Größen nothwendig eine Veränderung irgend einer der übrigen erfordert, falls die bestimmte Form der einander gleichgesetzten Größen bleiben und die gesetzte Gleichheit derselben Statt haben soll.

Dergleichen organische Zusammenstellungen aus simplen und geformten Quantis, worin die Zusammenstellungsglieder gleich seyn sollen, nennt man Gleichungen (Aequationes); die beiden zusammengestellten gleichen Größen, deren Gleichgesetztseyn man durch das zwischen sie gesetzte Gleichheitszeichen (=) anzeigt, heißen Seiten der Gleichung und die Größen und Zahlen, woraus diese gebildet sind, werden Elemente der Gleichung und der Seiten derselben genannt.

§ 43.

Daß wir nicht mehr, als die beiden vorerwähnten Formen des Bildens verschiedener Gat-

tungen von Größensystemen aufweisen können, das bringt die Gesetzmäßigkeit unseres Geistes so mit sich, daher auch nur zwey Gattungen von Größensystemen Statt haben können.

§ 44.

Wenn wir weiter über die verschiedenen möglichen Arten der Formen des Bildens organischer Größenzusammenstellungen, die unter den beiden vorerwähnten Formengattungen enthalten sind, nachdenken, so finden wir, daß vornehmlich in derjenigen Formengattung, aus welcher die Größensysteme, die Gleichungen sind, hervorgehen, verschiedene Arten unterschieden werden müßen. Wir können nämlich Gleichungen bilden

aaa) in der Form, daß wir zwey Größenpaare a, b und c, d zusammenstellen, bey welchen das Größenverhältniß zwischen den Gliedern des ersten Größenpaares eben so groß ist, wie zwischen den Gliedern des zweiten Paares.

Z. B. Wir können setzen, es solle von vier Größen a, b, c, d die d um dieselbe Differenz d, oder nach derselben Wieoftzahl q, größer oder kleiner seyn, als c, um welche die b größer oder kleiner ist, als die a; es solle sich also d gegen c verhalten, wie sich b gegen a verhält.

Solche Gleichungen zwischen den relativen Größenbestimmungen oder **Verhältnissen**, die zwischen den Gliedern zweier Größenpaare Statt haben, nennen wir **Verhältnißgleichungen** oder **Proportionen**. — Wir können aber auch Gleichungen bilden

bbb) in der Form, daß wir nicht **Verhältnisse** zwischen zwey Größenpaaren, sondern zwischen **zwey gleichartigen Größen** selbst, die der Form nach verschieden sind, einander gleich setzen.

> Z. B. Wir können setzen, es solle die aus a und b formirte **Summengröße** der vorgegebenen **simplen** Größe c, oder der aus b und c **formirten Productgröße** emalb **gleich** seyn.

Solche Gleichungen nennen wir, im Gegensatze jener Verhältnißgleichungen oder Proportionen, **Größengleichungen** oder **Gleichungen im engsten Sinne**.

b.

Bestimmung
der Qualitäts-Unterschiede der Groeßen in den Größensystemen und der an diese Unterschiede sich anschließenden Gattungen von Aufgaben.

§ 45.

Weil die in einem Größensysteme mit einander gedachten Größen gedacht werden als solche, die im Zusamenhange wechselseitiger Abhängigkeit untereinander stehen, so werden darin folgende zwey qualitiv verschiedene Größengattungen gedacht:

a) Solche Größen, deren Quantität von nichts abhängig, also beliebig annehmbar, von welcher aber die Quantität der übrigen dem Größensysteme zugehörenden Größen abhängig ist. Diese Größen nennt man unabhängige oder absolute und auch, weil ihre Quantität durch nichts bedingt ist und daher niemals unbekannt seyn kann, bekannte Größen.

b) Solche Größen, deren Quantität von andern Größen, und zwar nicht blos von der Quantität derselben, sondern auch von der organischen Verbindung, die zwischen

schen den Größen des Systems Statt hat, von der Form des Größensystems, abhängt. Solche Größen nennt man abhängige oder relative und diese können, wie die Folge zeigen wird, unbekannt und auch bekannt seyn.

Z. B. Wenn eine Progression mit der vorgeschriebenen Größe a anfangen und jedes ihrer folgenden Glieder um die gegebene Differenz b größer werden soll, so sind in diesem Größensysteme die beiden Größen a und b absolute, deren Quantität oder Werth man annehmen kann, wie man will, hingegen sind die auf a folgenden Progressionsglieder insgesammt dependente oder relative, denn die Werthe derselben sind einerseits von den Werthen von a und b und anderseits von der vorgeschriebenen Form des Größensystems, daß nämlich dieses eine um einerley Differenz b steigende Progression seyn soll, abhängig. — Wenn vier Größen a, b, c, d zu einer Verhältnißgleichung oder Proportion zusammengestellt seyn sollen und zwar dergestalt, daß sich d nach einer Differenz zu c verhält, die mit der Differenz b, um welche b größer, als c ist, übereinstimmt, so sind hier a, b, c absolute Größen, deren Werthe man beliebig annehmen kann, die Größe d aber ist hier abhängig, und zwar einerseits von den Werthen der Größen a, b, c und anderseits von der vorgeschriebenen Form des Systems, worin d mit a, b, c stehen soll und nach welcher nothwendig d eine aus c und b bestehende Summengröße seyn muß. — — Sollen ferner die Größen a, b, c zu einer Größengleichung in Verbindung gesetzt seyn und zwar in der Form, daß die aus a und b formirte Summe a und b dem

aus b und c gebildeten Multiplicationsproducte c mal b gleich sey, so muß hier, falls man sich die Größen a und b als absolute denkt, der Multiplicator c als abhängig gedacht werden, und zwar nicht blos abhängig von den Werthen von a und b, sondern auch von der für die Größengleichung vorgeschriebenen Bildungsform; nähme man aber b und c als absolut an, so wäre a abhängig, und würde endlich a und c als absolut angenommen, so wäre b eine abhängige Größe.

§ 46.

Nehmen wir nun in Untersuchung, wie viele verschiedene Formen uns ursprünglich eigenthümlich sind, worin wir die in Größensystemen zu unterscheidenden absoluten und relativen Größen denken können, so ergiebt sich Folgendes:

a) Rücksichtlich der absoluten Größen.

Wir können in einem Größensysteme gewisse von den absoluten Größen als solche annehmen, von welchen iede beständig denselben Werth behält, indem man einer oder etlichen der übrigen absoluten Größen immer andere beliebige Werthe beilegt und für diese die relativen Werthe derienigen Größe, die im Systeme als eine abhängige betrachtet wird, bestimmt.

Z. B. In der Größengleichung, a und b ist gleich c, können wir, wenn wir a und b als absolute Größen und c als eine von a und b abhängige Größe betrachten, setzen, daß a beständig denselben Werth behalten, b aber veränderlich seyn und eine Reihe beliebig angenommener Werthe durchlaufen solle, und können für diese Werthe von b die zu ihnen gehörenden Werthe der abhängigen Größe c in Betrachtung nehmen.

In dergleichen Fällen werden also unter den absoluten Größen unterschieden: veränderliche von unveränderlichen oder constanten Größen.

b') Rücksichtlich der relativen Größen der Größensysteme sind zuvörderst zwey oberste Formen, worin wir uns zwey verschiedene Gattungen solcher Größen denken können, zu unterscheiden, wie aus Folgendem erhellet:

a'') Wir können uns eine Größe G als eine von andern absoluten Größen a, b, c.... abhängige Größe denken auf die Weise,

„daß die abhängige Größe G eine aus „absoluten Größen a, b, c.... nach einem gewissen Erzeugungsgesetze zu erzeugende oder erzeugte Größe sey."

Z. B. Wenn wir uns eine Progression denken, die mit dem Gliede a anfangen und um die vorgegebene Differenz d wachsen soll, so denken wir uns alle auf a folgenden Glieder der Progression als abhängige aus a und d nach

einem bestimmten Gesetze zu erzeugende Größen. — Wenn wir ferner in der Größengleichung, a und b ist gleich c, die beiden Größen a und b als absolute annehmen, so wird c gedacht als eine abhängige nach einem bestimmten Gesetze erzeugte Größe.

Abhängige Größen von der Art, bey welchen wir uns denken, daß sie aus absoluten Größen a, b, c.... nach einem bestimmten Erzeugungsgesetze zu erzeugende oder erzeugte Größen seyen, nennen wir Erzeugnißgrößen.

b'') Wir können uns aber auch eine Größe G als eine von andern absoluten Größen a, b, c.... abhängige Größe denken auf die Weise,

„daß die abhängige G eine mit andern absoluten Größen a, b, c.... „in Verbindung stehende und eine gewisse Größe G' nach einem gewissen „Erzeugungsgesetze erzeugende Größe sey."

Z. B. Wenn wir in der Gleichung, a und b soll gleich c seyn, die beiden Größen b und c als absolute annehmen, so ist dann a eine von b und c und von der Verbindungsform, daß sie mit der gegebenen b die gegebene c erzeugen soll, abhängige erzeugende Größe.

Abhängige Größen von der Art, bey welchen wir uns denken, daß sie mit andern absoluten Größen a, b, c.... nach einem ge-

wissen Erzeugungsgesetze eine gewisse Größe G′ erzeugend seyen, nennen wir abhängige erzeugende Größen.

§ 47.

Denken wir nun weiter darüber nach, in welchen verschiedenen Formen wir uns iede von den beiden vorerwähnten Gattungen der abhängigen Größen denken können und wie wir diese weiter nach diesen Formen einzutheilen haben, so ergiebt sich Folgendes:

a″) Rücksichtlich derienigen abhängigen Größen, die aus andern absoluten Größen a, b, c.... hervorgehende Erzeugnißgroeßen G sind.

a‴) Dergleichen Größen können denkbarer Weise solche seyn, für welche man die Art ihres Erzeugtseyns aus andern absoluten Größen unmittelbar anzugeben weis.

Z. B. In der Progression, die mit a anfangen und worin iedes folgende Glied um b größer werden soll, als das ihm nächst vorausgehende Glied, ist iedes von den auf a folgenden Gliedern eine Erzeugnißgröße G, deren Erzeugungsform man unmittelbar weis. In der Gleichung, a und b ist gleich der Summe G, ist G eine Erzeugungsgröße, von welcher man unmittelbar weis, daß sie durch Addition der absoluten Größen a und b entsteht.

Erzeugnißgrößen von der hier angegebenen Art nennen wir, wegen des unmittelbaren Bestimmtseyns ihrer Erzeugungsform, unmittelbar qualitativ bestimmte und, wegen der hierbey unmittelbar möglichen Bestimmbarkeit ihrer Quantität, quantitativ bekannte Erzeugnißgrößen. —

b''') Es können aber auch die Erzeugnißgrößen solche seyn, für welche man die Art ihrer Erzeugung aus andern absoluten Größen nicht unmittelbar anzugeben weis, sondern diese erst, wenn man sie wissen will, ausfindig machen muß.

Z. B. Die Menge G von rhnl. Gulden, die man für hundert Ellen Tuch bezahlen muß, wenn 10 Ellen 38 Thlr. Sächs. kosten, ist eine aus den hier genannten Größen zu erzeugende Größe, man weis aber von dieser Größe nicht unmittelbar anzugeben, auf welche Weise sie aus den absoluten Größen, wovon sie abhängt, zu erzeugen sey.

Dergleichen Erzeugnißgrößen G nennen wir, wegen des Nichtbestimmtseyns ihrer Erzeugungsform, nicht unmittelbar qualitativ bestimmte und, wegen der bey ihnen nicht unmittelbar möglichen Bestimmbarkeit ihrer Quantität, quantitativ unbekannte Erzeugnißgrößen.

Eine nicht unmittelbar qualitativ bestimmte Erzeugnißgröße aber, die wir

hier durch y bezeichnen wollen, können wir uns ferner wieder auf zweifache Weise denken.

a'''') Die y kann als nicht unmittelbar qualitativ bestimmt gedacht werden, auf die Weise

„daß man zwar nicht für die y selbst „die Form ihrer Erzeugung aus andern „absoluten Größen a, b, c..., statt dessen aber doch für jede unbestimmte Zu- oder Abnahme der y, die „man eine Differenz von y nennt und „durch Dy bezeichnet, zu bestimmen „weis, wie diese Dy aus den zu „y gehörenden absoluten Größen „a, b, c.... zu erzeugen ist, falls „man von diesen eine oder etliche als „veränderliche Größen annimmt, diese dann um irgend eine beliebige „Differenz wachsen läßt, die übrigen absoluten Größen aber hierbey als constante betrachtet und nun die Frage „aufwirft, was für die beliebigen „Veränderungen der absoluten „veränderlichen Größen in allen „Fällen für eine Zu- oder Abnahme Dy der Erzeugnißgröße y „Statt haben muß."

Z. B. Man kann von einer Größe y wissen, daß sie ein Erzeugniß aus zwey Größen a und b seyn muß, kann aber nicht wissen, wie sie aus a und b zu erzeugen ist, statt dessen aber doch wissen, daß, falls man a irgend einen unveränderlichen Werth beilegt, wenn man

ferner b als eine veränderliche Größe x annimmt und irgend einen ihrer Werthe um ein beliebiges Stück Dx wachsen läßt, in allen Fällen hierbey die abhängige Größe y um eine solche Differenz Dy, die gleich a mal Dx ist, wachsen muß. Hier ist also zwar nicht die Erzeugungsform der y selbst aus a und b, aber doch die Erzeugungsform der Differenz Dy aus a und Dx bekannt.

Dergleichen nicht unmittelbar qualitativ bestimmte und deswegen auch quantitativ unbekannte Erzeugnißgrößen y nennen wir, weil sie doch vermittelst der Erzeugungsform ihrer unbestimmten Veränderungen oder Differenzen Dy, die man von ihnen anzugeben weis, qualitativ bestimmt sind, mittelbar oder relativ qualitativ bestimmte und quantitativ unbekannte Erzeugnißgrößen.

b'''') Die Größe y kann aber auch als nicht unmittelbar qualitativ bestimmt gedacht werden auf die Weise,

„daß man weder für die y selbst, „noch für ihre unbestimmte Differenz Dy die Erzeugungsform anzugeben weis."

Dergleichen Erzeugnißgrößen y, die auch nicht einmal mittelbar, vermittelst ihrer Differenzen Dy, qualitativ bestimmt sind, nennen wir absolut qualitativ unbestimmte und daher auch absolut quantitativ unbekannte Erzeugnißgrößen.

b'') Rücksichtlich derjenigen abhängigen Größen G, die mit andern absoluten Größen verbunden eine Größe G' erzeugende Größen sind.

a''') Dergleichen Größen können denkbarer Weise solche seyn, für welche man die Art oder Form, in welcher sie mit andern absoluten Größen eine gewisse Größe G' erzeugen sollen, unmittelbar anzugeben weis.

Z. B. Wenn man setzt, G solle eine solche Größe seyn, die durch die Multiplication mit einer vorgeschriebenen Zahl a und durch die Addition einer vorgeschriebenen Größe b zu der afachen G die vorgeschriebene Größe G' erzeugt, so ist G eine von a, b, G' abhängige erzeugende Größe, aber eine solche, von der man die Form, in welcher sie mit a und b verbunden G' erzeugen soll, weis.

Solche abhängige erzeugende Größen nennen wir, wegen des unmittelbaren Bestimmtseyns der Form, worin sie mit andern absoluten Größen verbunden eine gewisse Größe G' erzeugen sollen, unmittelbar qualitativ bestimmte abhängige erzeugende Größen; diese sind aber, weil durch das Bestimmtseyn dieser Form die Bestimmbarkeit ihrer Quantität nicht unmittelbar möglich ist, keine quantitativ bekannte (wie es bey den Erzeugnißgrößen in Nr. a'', a''' der Fall war) und werden daher auch rücksichtlich ihrer Quantität unbekannte erzeugende Größen genannt.

b‴) Es können aber auch die abhängigen erzeugenden Größen solche seyn, für welche man die Art oder Form, in welcher sie mit andern absoluten Größen eine gewisse Größe G′ erzeugen sollen, nicht unmittelbar anzugeben weis.

Dergleichen abhängige erzeugende Größen sind, im Gegensatze der in Nr. a‴ betrachteten abhängigen erzeugenden Größen, nicht unmittelbar qualitativ bestimmte abhängige erzeugende Größen zu nennen und sind ebenfalls, wie iene, rücksichtlich ihrer Quantität unbekannte.

Eine nicht unmittelbar qualitativ bestimmte abhängige erzeugende Größe, die wir hier durch x bezeichnen wollen, kann aber ebenfalls, wie es bey den nicht unmittelbar qualitativ bestimmten Erzeugnißgrößen in Nr. a″, b‴ der Fall war, in zwey verschiedenen Formen gedacht werden.

a⁗) Die x kann als nicht unmittelbar qualitativ bestimmt gedacht werden auf die Weise,

„daß man zwar nicht für die x selbst „die Form, worin sie mit andern abso„luten Größen eine gewisse Größe G′ „erzeugen soll, daß man aber doch „statt dessen für iede beliebige Zu„oder Abnahme der x, für iede „Differenz Dx, die Form anzugeben „weis, wie diese Dx mit andern abso-

„luten Größen verbunden jede beliebi-
„ge Zu- oder Abnahme einer Größe
„G′, jede Differenz DG′, erzeugen
„muß.“

Dergleichen nicht unmittelbar qualitativ bestimmte und quantitativ unbekannte abhängige erzeugende Größen x nennen wir, weil sie doch vermittelst ihrer unbestimmten Veränderungen oder Differenzen Dx qualitativ bestimmt sind, mittelbar oder relativ qualitativ bestimmte und quantitativ unbekannte abhängige erzeugende Größen.

b′′′′) Die Größe x kann aber auch als qualitativ unbestimmt gedacht werden auf die Weise,

„daß man weder für x selbst, noch
„für die unbestimmte Differenz
„Dx derselben die Verbindungsform
„angeben kann, worin sie mit andern
„absoluten Größen stehen und in dieser
„eine vorgegebene Größe G′ oder irgend
„eine beliebige Differenz DG′ derselben
„erzeugen soll.

Dergleichen abhängige erzeugende Größen x, die nicht einmal mittelbar, vermittelst ihrer Differenzen Dx, qualitativ bestimmt sind, nennen wir absolut qualitativ unbestimmte und daher auch absolut quantitativ unbekannte abhängige erzeugende Größen.

§ 48.

Daß wir bey mit einander gedachten Grö-ßen, die wir uns zu Größensystemen zusammen gehörend denken, alle die bisher angegebenen Qualitätsunterscheidungen zu machen und die Größen der verschiedenen denkbaren Größensysteme nach diesen Unterscheidungen gerade so, wie bereits geschehen ist, einzutheilen haben, dazu fühlen wir uns durch die unserem Geiste eigenthümliche Gesetzmäßigkeit genöthigt.

§ 49.

1) Nach diesen geistesgesetzmäßigen Unterscheidungen können, wie in § 47. gezeigt worden ist, in den verschiedenen von uns denkbaren Größensystemen diejenigen solchen Systemen zugehörenden Größen, die wir uns nicht als absolute, sondern als relative oder abhängige Größen denken wollen, quantitativ bekannte und auch quantitativ unbekannte Größen seyn. — Die letzteren Größen können ferner solche seyn, die qualitativ bestimmt und auch solche, welche dieses nicht und daher absolut unbekannt sind. — Endlich können auch die qualitativ bestimmten und quantitativ unbekannten abhängigen Größen wiederum von doppelter Art seyn:

A) Solche, die unmittelbar oder selbst qualitativ als abhängige quantitativ

unbekannte Größen bestimmt sind (zu welchen die in § 47, b'', a''' erwähnten abhängigen erzeugenden Größen gehören);

B) solche, die nicht unmittelbar oder selbst aber doch mittelbar, durch bekannte qualitative Bestimmungen ihrer Differenzen, qualitativ als abhängige quantitativ unbekannte Größen bestimmt sind (zu welchen die in § 47, a'', b''', a'''' erwähnten Erzeugnißgrößen und die das. in Nr. b'', b''', a'''' genannten abhängigen erzeugenden Größen gehören).

2) Da wir uns in Größensystemen die beiden vorerwähnten Gattungen abhängiger Größen, die zwar quantitativ unbekannt, aber doch qualitativ unmittelbar oder mittelbar bestimmt sind, denken können, diese Größen aber wegen der von ihnen bekannten qualitativen Bestimmungen nicht zu den absolut unbekannten gehören; so schließen sich an diese zwey Gattungen unbekannter Größen folgende zwey Gattungen von Aufgaben an:

„Wie man aus den qualitativen Bestim-„mungen solcher abhängiger Größen, die „zwar qualitativ bestimmt, aber quan-„titativ unbekannt sind, die Regeln für „die Bestimmung ihrer unbekannten Quan-„tität durch Schlüsse ableiten könne, und „zwar"

„A) in dem Falle, wenn die unbekannten abhän-„gigen Größen unmittelbar oder selbst „qualitativ bestimmt sind, und auch

„B) in dem Falle, wenn die unbek. abhäng. „Größen nicht unmittelbar oder selbst, „sondern nur mittelbar, durch qualitative „Bestimmungen ihrer unbestimmt großen Differenzen oder Veränderungen, qualitativ bestimmt sind.“

3) Es ist ohne Weiteres leicht begreiflich, daß man eine Theorie der Auflösung dieser zwey Gattungen von Aufgaben fordern und über die Möglichkeit und die Gränzen derselben Untersuchungen anstellen kann.

§ 50.

Wenn wir aus den bisherigen von § 23. an vorgenommenen Untersuchungen über die verschiedenen uns ursprünglich eigenthümlichen allgemeinen Formen des Miteinanderdenkens mehrerer nur schlechthin als Größen oder als Quanta gedachter Größen und über die aus diesen Formen hervorgehenden Productarten die für diese Producte erhaltenen Resultate ausheben und diese, zur leichtern Uebersicht derselben, tabellarisch zusammenstellen, so erhalten wir die diesem Werke hinten beigefügte Tabelle II.

Tabelle der Producte

der

llgemeinen Formen des Miteinanderdenkens

mehrerer Groeßen

als Größen schlechthin oder als Quanta.

Diese Producte sind folgende:

- A) Verhältnisse zwischen Größen (§ 25).
  - a) Rücksichtlich der Einer (§ 28).
    - A) Gleichartige Größen.
    - B) Ungleichartige.
      - a) Einstimmige Größen.
      - b) Entgegengesetzte.
  - b) Rücksichtlich der Vielheit der Einer (§ 28).
    - A) Gleiche.
    - B) Ungleiche.
      - a) Gleichzählige Größen.
      - b) Ungleichzählige.
- B) Erzeugnisse aus Größen (§ 25).
  - a) Formirte Größen (§ 30).
    - A) Vereinigungsgrößen (§ 32).
      - a) Durch Vereinig. ungleicher Größen (Addition) erzeugte oder Summen (§ 34).
      - b) Durch Vereinig. gleicher Größen (Multiplicat.) erzeugte oder Producte (das.).
        - a') Durch Vereinigung gleicher Posten (Multiplication im engsten Sinne) erzeugte oder Producte im engsten Sinne (das.).
        - b') Durch Vereinigung gleicher Factoren (Potenzirung) erzeugte oder Potenzen (das.).
    - B) Zerlegungsgrößen (§ 32).
      - a) Durch Zerleg. in ungleiche Größen (Subtraction) erzeugte oder Differenzen (§ 36).
      - b) durch Zerleg. in gleiche Größen erzeugte (§ 36).
        - a') In gleiche Posten (das.).
          - a'') Durch Demension erzeugte Quotienten (das.).
          - b'') Durch Partition erzeugte aliquote Theile (das.).
        - b') In gleiche Factoren (das.).
          - a'') Durch Wurzelextraction erzeugte Wurzeln (das.).
          - b'') Durch Exponentiiren erzeugte Exponenten und Logarithmisiren erzeugte Logarithmen (das.).
  - b) Zusammenstellungen aus simplen oder formirten Größen (§ 30).
    - A) Unorganische Größenzusammenstellungen oder Größenaggregate (§ 38).
      - a) Permutationsaggregate (§ 40).
      - b) Combinationsaggregate.
      - c) Variationsaggregate (das.).
    - B) Organische Größenzusammenstellungen oder Größensysteme (§ 38).
      - a) Aus gleichartigen ungleichen Größen (§ 42).
        - a') Aus zwey Größen; Verhältnißausdrücke (das.).
        - b') Aus mehreren Größen; Reihen (das.).
      - b) Aus gleichartigen gleichen Größen; Gleichungen (42).
        - a') Verhältnißgleichungen oder Proportionen (§44).
        - b') Größengleichungen (§ 44).

Die in den Größensystemen mit einander gedachten Größenarten sind folgende:

- a') Absolute (§ 45), die allemal bekannt sind.
  - a'') Constante. (§ 46).
  - b'') Veränderliche. (das.).
- b') Relative (§ 45), die bekannt und auch unbekannt seyn können.
  - a'') Erzeugnißgrößen (§ 46).
    - a''' Unmittelbar qualitativ bestimmte und daher quantitativ bekannte (§ 47).
    - b''') Nicht unmittelbar qualit. bestimmte und daher quantit. unbekannte (daselbst).
      - a'''') Relativ qualitativ bestimmte (§ 47).
      - b'''') Absolut qualitativ unbestimmte (das.).
  - b'') Abhängige erzeugende Größen (das.).
    - a''') Unmittelbar qualitativ bestimmte aber dennoch quantitativ unbekannte (§ 47).
    - b''') Nicht unmittelbar qualit. bestimmte und dabey auch quantitativ unbekannte (daselbst).
      - a'''') Relativ qualitativ bestimmte (§ 47).
      - b'''') Absolut qualitativ unbestimmte (das.).

2.

Besondere Formen, Producte, Gesetze des Miteinanderdenkens mehrerer Größen.

§ 51.

Nebst den in voriger Nr. 1. betrachteten uns eigenthümlichen Formen des Miteinanderdenkens mehrerer Größen, die bey allen und ieden Größen, sofern diese nur schlechthin als Größen oder als Quanta betrachtet werden, anwendbar und die deswegen allgemeine genannt worden sind, und den mit diesen Formen zusammenhängenden Producten und Gesetzen sind uns auch noch sehr viele besondere Formen eigenthümlich, worin wir uns nur besondere Arten von Größen mit einander denken und gewisse Producte erzeugen können und wobey wir uns ebenfalls an bestimmte Gesetze gebunden fühlen.

§ 52.

Beispiele für Größen der Extension.

1) Für räumlich extensive oder expansive Größen.

A) Wir können uns zwey Linien mit einander denken und aus ihnen eine Zusammenstellung aus zwey Linien als Product unseres Denkens erzeugen.

Hierbey finden wir, daß uns mehrerley Formen eigenthümlich sind, worin wir uns ein solches Product denken können, und daß hierbey gewisse Gesetze Statt haben, an die wir uns gebunden fühlen. Wir können uns z. B. zwey gerade Linien dergestalt gegen einander liegend denken, daß sie beide Gränzen von einerley ebener Fläche sind, aber auch so, daß das Gegentheil hiervon Statt hat. Im ersten Falle können wir uns die beiden zu einerley Ebene gehörenden geraden Linien vorstellen und denken als verbundene und als unverbundene. Als verbundene können sie gesetzt werden als solche, die sich berühren, oder als solche, die sich schneiden; und die sich berührenden können wiederum gesetzt werden als solche, von welchen das Ende der einen die andere in ihrem Ende oder in einem andern Puncte berührt. Als unverbundene gerade Linien können ferner die beiden Linien gesetzt werden als solche, die gehörig verlängert einander schneiden oder nicht schneiden können; und im letzten Falle sind diese wiederum vorstellbar in der Lage, daß die Verlängerung der einen geraden Linie in die andere hinein fällt, oder in einer solchen, daß dieses niemals möglich ist. — Das sind verschiedene Formen, worin wir uns zwey gerade Linien mit einander und gegen einander liegend denken können und worin verschiedene Producte entstehen, die wir Winkel, Vertikalwinkel, Nebenwinkel, con- und divergirende, in einander laufende und paral-

lele

lele Linien nennen. Daß uns aber die vorerwähnten Formen des Miteinanderdenkens zweier Linien und des Zusammenstellens derselben und nicht mehr oder weniger solcher Formen zukommen, das ist ein Gesetz unseres Geistes, an welchen wir uns bey diesem Denken gebunden fühlen.

B) Wir können uns ferner drey und mehrere Linien mit einander denken. Dabey finden wir, daß uns ebenfalls mannigfaltige Formen eigenthümlich sind, worin wir diese Handlung vornehmen und wodurch wir mannigfaltige Producte aus drey und mehreren Linien hervorbringen können, und daß wir uns auch hierbey wiederum an bestimmte Gesetze gebunden fühlen. Wir können nämlich Erzeugnisse aus drey und mehreren Linien bilden, in welchen die Linien nicht von einander abhängig, die also blose unorganische Linienzusammenstellungen sind, welche sich nur rücksichtlich der Lage der Linien von einander unterscheiden. Wir können aber auch Erzeugnisse aus drey oder mehreren Linien bilden, worin die Linien wechselseitig von einander abhängig, die also organische Linienzusammenstellungen oder Liniensysteme sind. Wir können uns z. E. zwey gerade Linien zu einem Winkel verbunden und zwischen dessen Schenkel eine dritte Linie gesetzt denken, welche auf dem einen Schenkel winkelrecht aufsitzt und bis an den andern Schenkel reicht. Hier ist die dritte in den Busen des Winkels gezogene Linie abhängig von dem Abstande, um welchen sie von der Spitze des Winkels entfernt ist, und auch abhängig von dem Grade der Neigung der beiden Winkelschenkel gegen einander, denn ie größer der eben erwähnte Abstand und ie größer die Neigung der Winkelschenkel wird, desto größer muß auch die zwischen diese Schenkel gezogene Linie seyn, und umgekehrt. Ferner ist, wenn man den vorerwähnten Abstand und

die eben genannte dritte Linie als absolute oder gegebene Größen annimmt, der Grad der Neigung der Winkelschenkel oder die Größe des Winkels von den eben genannten Linien abhängig. — Wir können drey Linien in ihren Endpuncten zu einem Dreiecke verbinden, dessen Gestalt und Flächenausdehnung von der Länge der Linien abhängig ist und dessen Seiten und Winkel im Zusammenhange wechselseitiger Abhängigkeit unter einander stehen und also in ihrer Verbindung ein organisches Product, ein Größensystem, bilden. So können wir überhaupt aus mehreren Linien begränzte Flächenräume oder Figuren bilden, deren Flächenausdehnungen abhängige Erzeugnißgrößen sind und deren Seiten und Winkel Größensysteme bilden.

2) Für zeitlich extensive oder protensive Größen.

Protensive Größen oder Zeiträume können wir uns nur mit einander denken in der Form, daß sie ununterbrochen nach einander folgen, wie es z. B. bey den Stunden eines Tages der Fall ist, oder in der, daß sie durch Zwischenzeiten von einander getrennt nach einander folgen, welches z. B. Statt hat, wenn wir uns mehrere Arbeitstage, welche durch die Nächte von einander getrennt sind, mit einander denken. Daß wir keine andern, als blos diese Formen des Miteinanderdenkens protensiver Größen aufweisen können, das gehört gleichfalls zu der Gesetzmäßigkeit unseres Geistes, an die wir uns rücksichtlich des Denkens besonderer Größenarten gebunden fühlen.

§ 53.

Beispiele für Größen der Coalition.

Wenn wir uns mehrere Kräfte dergestalt mit einander denken, daß sie auf einerley Stelle eines Körpers würken, so denken wir uns die Gesammtwürkung dieser Kräfte als eine Größe, deren Theile in einander verschmolzen sind, als eine intensive Größe oder Größe der Coalition.

Wir können uns aber zwey Kräfte oder Kraftsummen mit einander denken in der Form, daß sie beide in derselben, durch den Körper gezogen gedachten geraden Linie den Körper treiben oder ziehen, und zwar entweder nach einerley Seite oder nach einander entgegengesetzten Seiten hin. — Wir können hingegen auch zwey Kräfte oder Kraftsummen mit einander denken in der Form, daß beide in zwey verschiedenen aus einerley Stelle des Körpers gezogenen Linien den Körper nach einer Seite hin treiben oder ziehen. Und so können wir uns noch in mehreren Formen Kräfte und deren Würkungen als intensive Größen mit einander zu Größensystemen, in welchen die Total- und Theilwürkungen der Kräfte von einander abhängig sind, denken; wobey ebenfalls bestimmte Gesetze, an die wir uns gebunden fühlen, Statt haben.

§ 54.

Man könnte versuchen, die besondern Formen des Miteinanderdenkens besonderer Arten von Größen, z. B. der expansiven oder geometrischen, eben so systematisch aufzusuchen und deren Producte tabellarisch zusammengeordnet darzustellen, wie dieses in voriger Nr. 1. für die allgemeinen Formen des Miteinanderdenkens der Größen schlechthin oder der Quanta geschehen ist. Der Versuch muß zeigen, ob und wie weit dieses möglich und nützlich sey.

Ferner ist auch offenbar, daß bey den besondern Arten von Größen ebenfalls solche Aufgaben möglich sind, wie die in § 49. Nr. 2. erwähnten, und daß auch die Auflösung dieser in Untersuchung genommen werden kann.

V.

Das Denken der Attribute unserer Producte des Einzelndenkens und Miteinanderdenkens der Größen und die Gesetzmäßigkeit dieses Thätigseyns.

§ 55.

Wenn wir die Producte, die wir dadurch erzeugen, daß wir uns Gegenstände einzeln

oder mit andern in gewissen Formen als Größen schlechthin, oder als Quanta, oder als Größen besonderer Art denken, gehörig in Betrachtung nehmen, so entdecken wir Folgendes: Wir finden unter ihnen solche, denen nicht blos diejenigen Arten des Seyns oder Qualitäten zukommen, deren Vorstellungen als Theilvorstellungen oder Merkmale (notae) in den Begriffen, wodurch wir uns diese Producte denken und sie von einander nach Gattungen und Arten unterscheiden, enthalten sind, sondern welchen Producten außer den eben erwähnten Qualitäten noch andere zukommen, die zwar nicht als Merkzeichen (notae) in den Begriffen von diesen Producten gedacht werden und daher auch nicht durch Auflösung (Analysis) dieser Begriffe in ihre Theilvorstellungen, also nicht durch Erklärung dieser Begriffe, aus diesen erhalten werden können, die aber dennoch den Producten eben so nothwendig zukommen, wie ihre in den Begriffen von ihnen enthaltenen Merkmale, weil sie sich an diese mit Nothwendigkeit entweder unmittelbar oder mittelbar anschließen, die also eben so, wie die Merkmale, unveränderliche oder nothwendige, zum Wesen der Producte gehörende oder wesentliche Qualitäten und daher von den zufälligen oder außerwesentlichen Qualitäten der Producte (welche diesen wohl zukommen können, aber nicht nothwendig zukommen müßen) wohl zu unterscheiden sind. Dergleichen unveränderliche, nothwendige oder wesentliche Qualitäten, die sich an

jene, die in den Begriffen von den Producten enthalten sind, mit Nothwendigkeit, also geistesgesetzmäßig entweder unmittelbar oder mittelbar anschließen, die also nicht aus dem Begriffe von einem Producte, durch Auflösung oder Erklärung desselben folgen (quae non sequntur ex conceptu), sondern die dem Begriffe nachfolgen (quae sequntur conceptum), nennen wir secundär wesentliche, consecutive Qualitäten, Eigenschaften, Attribute (Attributa) und auch synthetische Qualitäten und unterscheiden sie dadurch von denienigen Qualitäten, die in den Begriffen von den Producten enthalten und zu diesem nothwendig sind, die man primitiv wesentliche, constitutive (die Begriffe feststellende) Qualitäten, Merkmale oder Merkzeichen (notae) und auch analytische Qualitäten nennt, weil sie aus den Begriffen durch Auflösung derselben erhalten werden oder folgen.

Man hat also Merkzeichen (notae) der Producte, wodurch wir uns diese in den Begriffen von ihnen als Eigenthümer gewisser Eigenschaften denken, und Eigenschaften (Attributa), die den Producten als Eigenthümern derselben geistesgesetzmäßig beigelegt (attribuirt) werden müßen, zu unterscheiden.

Z. B. Wenn eine Größe G mit dem Merkzeichen gedacht wird, daß sie eine Summe aus Größen a und b ꝛc. ꝛc. sey, so muß diese Summe auch als Eigenthümer der Eigenschaft oder des Attributs gedacht werden, daß ihr Werth derselbe bleibe, wenn man die Ordnung ihrer Posten verändert. Dasselbe gilt auch von den Mul-

tiplicationsproducten a mal b mal c ꝛc. ꝛc. Wenn eine Größenreihe mit dem Merkzeichen gedacht wird, daß sie mit a anfange und daß iedes Glied um dieselbe Differenz d größer werde, als das ihm zunächst vorhergehende, so muß eben diese Reihe auch als Eigenthümer der Eigenschaft gedacht werden, daß iede zwey gleichweit von ihrem Anfangs- und Endgliede entfernten Glieder derselben eine Summe geben, welche der Summe ihres ersten und letzten Gliedes gleich ist. Wenn eine Verhältnißgleichung oder Proportion mit dem Merkzeichen gedacht wird, daß das 4te Glied d um dieselbe Differenz d vom dritten c verschieden sey, um welche Differenz d das zweite Glied b vom ersten a unterschieden ist, so muß diese Proportion auch als Eigenthümer der Eigenschaft gedacht werden, daß ihre äußern Glieder a und d dieselbe Summe geben, wie ihre mittlern Glieder b und c. — Wenn wir uns zwischen zwey Puncten eine Linie mit dem Merkzeichen denken, daß sie gerad sey, so muß diese Linie nothwendig auch als Eigenthümer der Eigenschaft, daß sie unter allen möglichen zwischen denselben zwey Producten ziehbaren geraden Linien die kürzeste sey, gedacht werden. Wenn wir uns ferner ein Winkelpaar mit dem Merkzeichen denken, daß in dem einen der beiden Winkel die beiden Schenkel desselben in eben dem Grade gegen einander geneigt seyen, wie in dem andern, so muß dieses Winkelpaar nothwendig auch als Eigenthümer der Eigenschaft gedacht werden, daß sich die beiden Winkel dieses Paares bey gehörig vorgenommenem Uebereinanderlegen derselben einander decken müßen. Denken wir uns irgend ein Figurenpaar, z. B. zwey Dreiecke, mit den Merkzeichen, daß bey ihnen gleiche Flächenausdehnung und Begränzungsform Statt habe, so muß dieses Figuren-

paar nothwendig auch als Eigenthümer der Eigenschaft gedacht werden, daß iede von ihnen, gehörig auf die andere gelegt, die andere decke. Denken wir uns eine ebene Figur mit den Merkzeichen, daß sie von drey geraden Linien begränzt, also ein geradliniges Dreieck sey, so müßen wir uns diese Figur nothwendig auch als Eigenthümer der Eigenschaften denken, daß die Summe ieder zwey ihrer Seiten größer sey, als die Länge der dritten Seite, und daß ferner die Summe ihrer drey Winkel stets dieselbe bleiben müße.

§ 56.

Die eben erwähnte nothwendige Unterscheidung der Merkzeichen (notae) oder analytischen Qualitäten, die in unsern Begriffen von den Dingen gedacht und aus diesen durch Auflösung (Analysis) oder Erklärung der Begriffe erhalten werden können, von den Eigenschaften (Attributa) oder synthetischen Qualitäten der Dinge, die sich an die Begriffe von diesen geistesgesetzmäßig anschließen, aber keineswegs aus diesen Begriffen als Bestandtheile derselben abgeleitet werden können, ist von manchen Philosophen nicht gehörig aufgefaßt werden, denn sonst hätten diese nicht versucht, synthetische Seynsarten geometrischer Gegenstände vermittelst des Satzes des Widerspruches aus den Begriffen von diesen Gegenständen abzuleiten, was ein offenbar schiefes Unternehmen war. — Nur das, was in einen Begriff von Gegenständen aufgenom-

men ist und nothwendig, zur Unterscheidung einer Gattung oder Art derselben von andern Gegenständen, aufgenommen seyn muß, kann in diesem Begriffe durch Zergliederung oder Erklärung desselben wiederum gefunden und daraus abgeleitet werden. Was sich aber geistesgesetzmäßig unmittelbar oder mittelbar an den Begriff anschließt, das folgt keineswegs aus dem Begriffe, ist also keineswegs ein analytisches Product, sondern es folgt nur dem Begriffe nach (sequitur conceptum), weil es die Gesetzmäßigkeit unseres Geistes so fordert.

Z. B. in dem Begriffe, ebenes und geradliniges Dreieck wird nicht mehr und nicht weniger gedacht, als eine ebene Fläche und ein Begränztseyn derselben durch drey gerade Linien. Daher kann nun auch in diesem Begriffe nicht mehr gefunden und aus ihm ausgehoben werden, als was in ihn, zur Unterscheidung dieser Dreiecke von andern Figuren, aufgenommen worden ist. Die Qualitäten der ebenen geradlinigen Dreiecke, daß die Summe jeder zwey ihrer Seiten größer seyn muß, als die dritte Seite lang ist, daß ferner die Summe aller drey Winkel stets dieselbe Größe behält, man mag diese Dreiecke verändern, wie man will, diese Qualitäten gehören zwar ebenfalls, wie die oberwähnten Merkzeichen, zu den unveränderlichen, den nothwendigen oder wesentlichen Qualitäten solcher Dreiecke, sie sind aber keine zum Begriffe von diesen Dreiecken nothwendige oder in diesen gehörende Qualitäten (man würde offenbar ausgelacht werden, wenn man sie in den Begriff aufnehmen wollte), sondern sie sind

wesentliche Qualitäten, die sich an den Begriff anschließen, sie sind secundär oder consecutiv wesentlich, Eigenschaften oder Attribute von Eigenthümern, welche durch die primitiv oder constitutiv wesentlichen Qualitäten, die Merkzeichen dieser Eigenthümer in dem Begriffe von ihnen gedacht werden.

§ 57.

Weil die wesentlichen Qualitäten der Producte unseres Denkens der Größen theils analytische, theils synthetische sind, so hat man auch die Urtheile, worin diese Qualitäten als Prädicate der Subiecte gedacht und ausgesprochen werden, nach diesen Qualitäten zu unterscheiden.

1) Urtheile, worin die Prädicate analytische Qualitäten oder Merkzeichen (notae) des Subiects sind, nennt man analytische oder Urtheile im eigentlichsten Sinne, weil durch sie der Subiectbegriff in einen oder mehrere seiner ursprünglichen Bestandtheile zerlegt gedacht wird. Man nennt sie auch Erklärungen (Declarationes), weil durch sie klar gemacht oder angedeutet wird, welche Theilvorstellungen der Subiectbegriff in sich enthält. Diese können unvollständige und vollständige seyn. Die letzteren werden in dem Falle Definitionen genannt, wenn in ihnen ordnungsmäßig der Begriff von der niedrigsten Gattung der Gegenstände, worauf sich das Subiect bezieht, den man das Gene=

ralmerkzeichen (nota generica) nennt, und nebst diesem das Merkmal derienigen in der eben erwähnten Gattung enthaltenen Art der Gegenstände, die dem Subiectbegriffe zugehören, welches Merkmal das Specialmerkzeichen (nota s. differentia specifica) heißt, angegeben ist.

Z. B. Die Urtheile, ein Dreieck ist eine Figur, ein Dreieck ist dreiseitig, sind analytische, also Urtheile im eigentlichsten Sinne oder Erklärungen, beide aber sind unvollständige. Das Urtheil, ein Dreieck ist eine Fläche, aber eine begränzte und zwar von drey Seiten, ist eine vollständige Erklärung. Das Urtheil, ein Dreieck (Subj.) ist eine Figur (nota gen.), und zwar eine dreiseitige (diff. spec.), ist eine Definition.

2) Urtheile, worin die Prädicate synthetische Qualitäten oder Eigenschaften (Attributa) der Subiecte sind, nennt man synthetische oder Sätze im eigentlichsten Sinne, weil in ihnen dem Subiectbegriffe etwas zugesetzt wird, was nicht schon implicite in ihm liegt. Diese sind entweder durch sich selbst, also unmittelbar, gewiß, oder sie müßen erst durch Schlüße zu gewissen Sätzen erhoben, sie müßen bewiesen werden und sind also nur mittelbar gewiß. Beide Arten von Sätzen nennt man Erkenntniß- oder theoretische Sätze, weil durch sie Arten des Seyns oder Qualitäten der Gegenstände erkannt werden, und dadurch unterscheidet man sie von practischen Sätzen, in welchen

die Prädicate keine Qualitäten, sondern Handlungen sind. Die unmittelbar gewissen theoretischen Sätze nennt man theoretische Grundsätze oder Axiome; die mittelbar gewissen theoretischen Sätze aber werden Lehrsätze oder Theoreme genannt, weil ihre Gewißheit erst durch Schlüße gelehrt oder zur Einsicht gebracht werden muß.

Z. B. Der Satz, wenn eine zwischen zwey Puncten gezogene Linie gerad ist, so ist sie die kürzeste unter allen zwischen denselben zwey Puncten ziehbaren Linien, ist ein theoretischer Grundsatz, ein Axiom; aber der Satz, wenn eine Figur ein Dreieck ist, so enthält sie allemal solche Winkel, deren Summe der Summe zweier Winkel, die man rechte nennt, gleich ist, gehört zu den Lehrsätzen, denn er muß erst bewiesen werden, ehe man ihn als gewiß annehmen kann.

3) Weil auch die analytischen Sätze durch sich selbst gewiß seyn müßen, da sie ia nur explicite angeben, was schon implicite im Subiectbegriffe gedacht ist, so sind auch sie theoretische Grundsätze, sie sind aber analytische und also dadurch von den synthetischen oder den Axiomen zu unterscheiden.

§. 58.

Da nach den bisher angestellten Betrachtungen den Producten unseres Denkens der Größen außer ienen primitiv-oder Grund-

wesentlichen Qualitäten, wodurch wir sie uns in unsern Begriffen von ihnen denken, auch noch andere Qualitäten zukommen, die sich zwar nicht durch Zergliederung der Begriffe von ihnen aus diesen ableiten lassen, sich aber doch mit Nothwendigkeit an diese entweder unmittelbar oder mittelbar anschließen, und da wir eben deswegen genöthigt sind, unsere Urtheile über solche Producte in analytische (Erklärungen und Definitionen) und in synthetische und die letztern wiederum in Axiome und Theoreme einzutheilen; so ist hiermit ganz offenbar, daß unser Geist in seiner Thätigkeit des Denkens der Größen nicht blos an Gesetze von der in den vorigen Nrn angegebenen Art, nach welchen er in seinem Denken der Größen gewisse Productarten erzeugt, sondern daß er nebst diesen auch noch an Gesetze gebunden ist, nach welchen er diesen Productarten gewisse von ihren Merkzeichen ganz verschiedene Eigenschaften oder Attribute beilegen muß.

Zweiter Abschnitt.

Wesen und Name

der Mathematik.

§ 59.

Durch die im vorigen Abschnitte vorgenommenen Betrachtungen und Untersuchungen ist offenbar, daß unser Geist auf folgende Weise eingerichtet ist:

1) Er muß sich, zufolge seiner ursprünglichen Anlage, alle und iede in Raum und Zeit vorstellbaren Gegenstände als Größen vorstellen und denken (vor. Abschn. Nr. I).

2) Er kann sich aber nicht blos einzelne, sondern er kann sich auch mehrere Gegenstände miteinander als Größen denken (vor. Abschn. Nr. II).

3) Sowohl für das Einzeln-, als auch für das Miteinanderdenken der Größen sind ihm mannigfaltige allgemeine und besondere Formen eigenthümlich, worin er mannigfaltige Producte dieser seiner Thätigkeitsformen hervorbringt und wobey er sich an bestimmte Productionsgesetze gebunden fühlt (vor. Abschn. Nr. III und IV).

4) Nebst diesen Productionsgesetzen fühlt er sich aber zugleich auch noch an Gesetze gebunden, nach welchen er den vorerwähnten Producten seiner Thätigkeit außer jenen primitiven oder grundwesentlichen Qualitäten, den Merkzeichen der Producte, wodurch er sich diese in seinen Begriffen von ihnen denkt, noch gewisse consecutiv wesentliche Qualitäten, Eigenschaften oder Attribute, unmittelbar oder mittelbar beizulegen genöthigt ist (vor. Abschn. Nr. V).

5) Unter den Producten seiner Thätigkeit des Denkens der Größen ergeben sich ihm solche, die von andern absoluten Größen abhängig und rücksichtlich der Art ihrer Abhängigkeit zwar qualitativ bestimmt, die aber quantitativ unbestimmt, also in dieser Rücksicht unbekannt sind und bey welchen sich in ihm folgende allgemeine Aufgabe erheben muß:

„Wie lassen sich aus den die Art der Abhängigkeit abhängiger Größen von andern absoluten Größen betreffenden qualitativen und gegebenen Bestimmungen derselben die Regeln der Bestimmung

„ihrer unbekannten Quantität durch „Schlüße ableiten (vor. Abschn. § 49. und „§ 54.)“

§ 60.

Da nun dieses ist, so muß eine Wissenschaft Statt haben, worin die in vor. §phen angegebenen Gegenstände in systematischer Form ausführlich in Betrachtung genommen werden. Diese Wissenschaft kann, weil die Gattung der Obiecte, von welchen sie zu handeln hat, in Größen besteht, kürzlich durch den Ausdruck Groeßenwissenschaft bezeichnet werden.

Wenn man aber mit diesem blos die Gattung der Obiecte dieser Wissenschaft bezeichnenden Ausdrucke nicht zufrieden seyn mag, sondern statt dessen vielmehr eine ihr ganzes Wesen richtig und vollständig darstellende Erklärung verlangt, so ist nothwendig, daß man diese Erklärung aus den im vorigen §phen angegebenen und im vorigen Abschnitte systematisch und ausführlich in Erwägung gezogenen Puncten ableite und sie auf folgende Weise aufstelle:

„Die Größenwissenschaft ist eine sy„stematisch geordnete Summe von Erkennt„nissen, und zwar von solchen, welche be„treffen:“

„1) Die uns ursprünglich eigenthümlichen „Formen des Einzeln- und Miteinan„derdenkens der Größen, die Producte

„die-

„dieser unserer Geistesthätigkeit und die Pro-
„ductionsgesetze, an die wir uns in die-
„ser gebunden fühlen;

„2) die Bestimmung der diesen Produc-
„ten geistesgesetzmäßig zukommenden At-
„tribute und endlich

„3) die Bestimmung der Schlußmethoden,
„vermittelst welcher aus angegebenen qua-
„litativen Bestimmungen abhängiger
„und quantitativ unbekannter Grö-
„ßen die Regeln für die Bestimmung
„ihrer Quantität abgeleitet und somit die
„unbekannten abhängigen Größen zu bekann-
„ten erhoben werden können."

§ 61.

Diese Wissenschaft muß, zufolge dieses ihres so eben angegebenen Wesens, nothwendig in den Kreis derjenigen Wissenschaften gehören, welchen die systematische Aufstellung der Denk- und Erkenntnißgesetze des menschlichen Geistes zugehört und die man theoretisch-philosophische Wissenschaften nennt. Es gebührt dem Philosophen von Profession, daß er diesen Kreis des menschlichen Wissens systematisch und so einzutheilen verstehe oder einzutheilen versuche, daß sich in diesem die Größenwissenschaft als ein nothwendiges Glied der Eintheilung findet.

§ 62.

Die Größenwissenschaft hat sich unter den Menschen, theils durch äußere Bedürfnisse, theils durch das wissenschaftliche Streben derselben nach gründlicher Erkenntniß der Formen und Gesetze des Würkens ihres Geistes, allmählich entwickelt und ist iezt als eine bereits schon in hohem Grade ausgebildete Wissenschaft, die iedoch reicher an materialer als formaler Ausbildung ist, vorhanden. In den Schulen der griechischen Philosophen, besonders der Pythagoräer und Platoniker, hat sie die Namen Mathesis und Mathematik erhalten, die auch bis iezt noch beibehalten worden sind. Diese Philosophen forderten von denen, die an ihrem Unterrichte Theil nehmen wollten, schon einen gewissen Grad wissenschaftlicher Ausbildung, oder, allgemeiner ausgedrückt, sie forderten von ihnen Kenntnisse (mathemata), oder Wissenschaft (sciencia, cognitio, mathesis) und zwar besonders in der Größenlehre, weswegen hernach vorzugsweise unter dem Worte Mathesis die Größenlehre oder Größenwissenschaft verstanden worden ist.

Dritter Abschnitt.

Organismus der Mathematik.

§ 63.

Da unser Geist ursprünglich so eingerichtet ist, daß alle und jede im Raume und in der Zeit von uns vorstellbaren Gegenstände für uns solche seyn müßen, denen Größe zukommt (§ 4), so sind auch alle diese Gegenstände den uns ursprünglich eigenthümlichen Formen und Gesetzen des Vorstellens und Denkens der Größen unterworfen und es müßen daher die Lehren der Mathematik für alle diese Gegenstände gültig und auf sie anwendbar seyn. Die häufigen Anwendungen, die sich daher von diesen Lehren in der Natur und im Kreise des menschlichen Lebens und Webens machen lassen, haben Veranlassung zu vielerley Wissenschaften gegeben, in welchen die Lehren der Mathematik eine vorzügliche Rolle spielen. Deswegen hat man diese

Wissenschaften (die man in mehreren Lehrbüchern der Mathematik angegeben findet) zu einem Aggregate zusammen genommen und hat dieses durch den Ausdruck angewandte Mathematik bezeichnet, wofür aber kein richtiger und haltbarer Grund aufgebracht werden kann. Ist man berechtigt, eine Reihe verschiedener Wissenschaften blos deswegen, weil in ihnen sehr viele Lehren der Mathematik angewendet werden müßen, oder, weil ihnen die Mathematik vornehmlich als Hülfswissenschaft dient, als angewandte Mathematik zu betrachten, so hat man eben so gut auch das Recht, alle Wissenschaften zusammen genommen angewandte Logik (welcher Ausdruck iedoch hier in anderem Sinne, als er gewöhnlich in der Eintheilung der Logik genommen wird, zu nehmen ist) zu nennen, weil ohne die Logik gar keine Wissenschaft Statt haben kann. Jene Wissenschaften, die man zu einer chaotischen Masse des Wissens zusammengestellt und angewandte Mathematik genannt hat, sind theils physische, theils technische, theils politische.

Darum nun, weil man ein Aggregat ganz verschiedenartiger Wissenschaften zu einer angewandten Mathematik gestempelt hatte, mußte man die eigentliche Größenwissenschaft oder Mathematik durch ein Beiwort bezeichnen und man nannte sie daher reine, weil nicht die Erfahrung, sondern einzig und allein der Geist selbst die Quelle seyn kann, woraus sie ihre Erkenntnisse von der ursprünglichen Einrichtung, an die unser Geist in seinem Vorstellen und Denken der Größen gebunden ist, zu schöp=

sen hat. Deswegen hat man seit langer Zeit die Mathematik in zwey Haupttheile, in die reine und angewandte, eingetheilt. Diese ganz unstatthafte Eintheilung aber wird hier gänzlich bey Seite gesetzt, weil nur eine Mathematik, die man gewöhnlich die reine nennt, eigentliche Mathematik ist. Von dieser soll nun gezeigt werden, wie man sie in Haupt-, Unter- und Nebenabtheilungen nach richtigen Grundsätzen einzutheilen, wie man die Titel ihrer Glieder richtig und deutlich einzurichten und diese zu einem organischen Ganzen zusammen zu stellen hat.

I.

Eintheilung der gesammten Mathematik.

§ 64.

Da uns nach den in Nr. IV. 1 und 2. des ersten Abschnittes angestellten Betrachtungen ursprünglich nicht blos allgemeine, sondern auch besondere Formen des Einzeln- und Miteinanderdenkens der Größen eigenthümlich sind, worin wir mannigfaltige Producte dieses unseres Denkens nach gewissen Geistesgesetzen erzeugen, und zwar, nach Nr. V jenes Abschn., nicht nur solche Producte, denen wir geistesgesetzmäßig gewisse Attribute beizulegen

haben, sondern auch, nach § 49. und 54. solche, die zwar qualitativ bestimmte aber quantitativ unbekannte abhängige Größen sind und bey welchen uns daher das Erschließen ihrer Quantität aus ihren Qualitäten zur Aufgabe wird; so ist hiermit ohne Weiteres ganz offenbaar, daß man die Mathematik in zwey Hauptabtheilungen, in allgemeine und besondere, abzutheilen und die Titel dieser Theile auf folgende Weise aufzustellen habe:

Der

gesammten Mathematik

erste Hauptabtheilung.

Allgemeine Mathematik,

oder Wissenschaft von den

allgemeinen

Formen, Producten, Gesetzen

unseres Einzeln- und Miteinanderdenkens der Größen, den gesetzmäßigen Attributen dieser Producte und den Methoden des Erschließens der Größe derienigen von diesen Producten, welche qualitativ bestimmte und quantitativ unbekannte abhängige Größen sind.

Zweite Hauptabtheilung.

Besondere Mathematik,

oder Wissenschaft von den

besondern

Formen, Producten, Gesetzen

u. s. w. (wie in der ersten Abth.)

§ 65.

Die allgemeine Mathematik ging aus von der Lehre von den Zahlen, die man Arithmetik nannte, und entwickelte sich allmählich zu der Wissenschaft, als welche sie gegenwärtig vorhanden ist. Obschon diese iezt weit mehr, als blose Arithmetik ist, so hat man doch ihren anfänglichen Namen beibehalten. — Die besondere Mathematik ging von Erkenntnissen aus, die zwar zu den in obigem Titel bezeichneten gehören, die aber nur die räumlich ausgedehnten oder expansiven Größen, die Linien, Flächen und Körper, betreffen und die man nöthig hatte, um Theile der Erdoberfläche auszumessen. Diese Erkenntnisse faßte man zusammen und nannte sie Erdmeßkunst oder Geometrie. Obgleich die besondere Mathematik gegenwärtig eine von der Erdmeßkunst ganz verschiedene Wissenschaft ist, so ist

doch für diejenige Abtheilung derselben, welcher die räumlich ausgedehnten Größen zugehören, die Benennung Geometrie beibehalten worden. Daher sagt man gewöhnlich, die Mathematik bestehe aus Arithmetik und Geometrie.

II.

Eintheilung der allgemeinen Mathematik.

§ 66.

Weil sich unser Denken der Größen nach § 5. geistesgesetzmäßig in ein Einzeln- und Miteinanderdenken derselben spaltet und uns nach § 5, 6 ꝛc. ꝛc. für diese beiden Denkweisen der Größen allgemeine Formen eigenthümlich sind, worin wir uns an gewisse Gesetze gebunden fühlen, so muß offenbar die allgemeine Mathematik in zwey Theile zerfallen, von welchen der eine die allgemeinen Formen ꝛc. ꝛc. des Einzelndenkens, der andere aber die allgemeinen Formen ꝛc. ꝛc. des Miteinanderdenkens der Größen zum Gegenstande hat und deren Titel auf folgende Weise aufzustellen sind:

Der allgemeinen Mathematik erster Theil.

Allgemeine Formen, Producte, Gesetze des Denkens einzelner Größen.

Zweiter Theil.

Allgemeine Formen, Producte, Gesetze unseres Miteinanderdenkens mehrerer Größen, die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und die Methoden des Erschließens der Quantität derjenigen von diesen Producten, die qualitativ bestimmte und quantitativ unbekannte abhängige Größen sind.

§ 67.

Daß im ersten Theile der allgemeinen Mathematik nur von dem, was der obige für diesen Theil angegebene Titel angiebt, die Rede seyn kann und hingegen der Gehalt des zweiten Theils, wie dessen Titel zeigt, mannigfaltiger seyn muß, das hat seinen Grund in

dem Miteinanderdenken der Größen, wodurch theils Producte entstehen, denen gewisse Attribute zukommen, theils solche, die qualitativ bestimmte und quantitativ unbekannte Größen sind.

III.

Eintheilung des ersten Theils der allgemeinen Mathematik.

§ 68.

Da uns nach § 10. verschiedene Formen eigenthümlich sind, worin wir uns Größen, wenn wir uns diese als Quanta denken, sowohl rücksichtlich ihrer Einer als auch rücksichtlich der Vielheit dieser Einer auf verschiedene Weise denken und dadurch verschiedene Producte dieses Denkens erzeugen können, und da wir uns hierbey an bestimmte Gesetze gebunden fühlen; so muß der erste Theil der Mathematik zwey Abschnitte erhalten, deren Titel auf folgende Weise aufzustellen sind:

Erster Abschnitt.

Allgemeine

Formen, Producte, Gesetze

des Denkens einzelner Größen rücksichtlich der **Einer** derselben.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine

Formen, Producte, Gesetze

des Denkens einzelner Größen rücksichtlich der **Vielheit** ihrer Einer.

IV.

Eintheilung

des zweiten Theils

der allgemeinen Mathematik.

§ 69.

Nach § 25. sind uns zwey Gattungen von Formen des Miteinanderdenkens der Größen eigenthümlich, deren Producte theils Verhältnisse zwischen Größen, theils Erzeugnisse aus Größen sind, und bey diesen finden wir uns an bestimmte Gesetze gebunden. Da dieses ist, so muß auch der zweite Theil der allgemeinen Mathematik in zwey Abschnitte eingetheilt und die Titel derselben müßen auf folgende Weise aufgestellt werden:

Erster Abschnitt.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Miteinanderdenkens mehrerer Größen, deren Producte Verhältnisse zwischen Groeßen sind.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Miteinanderdenkens mehrerer Größen, deren Producte Erzeugnisse aus Groeßen sind, die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und die Methoden des Erschließens der ꝛc. ꝛc.

§ 70.

Daß die Mannigfaltigkeit des Gehaltes des vorerwähnten ersten Abschnittes geringer seyn muß, als die des zweiten, das hat seinen Grund darin, weil dem ersten Abschnitte nur relative Prädicate oder Verhältnisse zwischen Größen zugehören.

V.

Spaltung des ersten Abschnittes des zweiten Theils der allgem. Mathematik.

§ 71.

Nach § 28. können wir uns Verhältnisse zwischen den Einern der als Quanta gedachten Größen und auch Verhältnisse, welche die Vielheit der Einer der Quanta betreffen, in verschiedenen Formen denken und wir sind dabey an bestimmte Gesetze gebunden. Wegen des hier angegebenen Gegensatzes muß also offenbar der vorerwähnte erste Abschnitt des zweiten Theils der allgemeinen Mathematik in zwey Hauptstücke eingetheilt werden, deren Titel auf folgende Weise aufzustellen sind.

Erstes Hauptstück.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Miteinanderdenkens mehrerer Größen, dessen Producte Verhältnisse der Einer der Größen sind.

Zweites Hauptstück.

Allgemeine Formen und Gesetze

des Miteinanderdenkens mehrerer Größen, dessen Producte Verhältnisse der Vielheit der Einer der Größen sind.

§ 72.

Weil nach § 28. die Größen rücksichtlich ihrer Theile und Einer, woraus sie bestehen, gleichartig und ungleichartig und die ungleichartigen wiederum einstimmig und entgegengesetzt seyn können, so muß das vorerwähnte erste Hauptstück wiederum in Kapitel zerlegt werden, so daß in einem besondern Kapitel vom Wesen der entgegengesetzten Größen das Nöthige vorgetragen werden kann.

VI.

Spaltung des zweiten Abschnittes.

des zweites Theils der allgemeinen Mathematik.

§ 73.

Nach §. 38. sind die diesem Abschnitte zugehörenden Erzeugnisse aus Größen von doppelter Art, nämlich formirte Größen, oder Zusammenstellungen aus simplen

oder formirten Größen; daher muß dieser Abschnitt ebenfalls in zwey Hauptstücke eingetheilt und für diese müßen die Titel auf folgende Weise aufgestellt werden:

Erstes Hauptstück.

Allgemeine
Formen und Gesetze
desienigen Miteinanderdenkens mehrerer Größen,
wodurch solche Erzeugnisse aus Größen entstehen,
welche formirte Groeßen sind,
die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und
die Methoden des Erschließens der ꝛc. ꝛc.

Zweites Hauptstück.

Allgemeine
Formen und Gesetze
desienigen Miteinanderdenkens mehrerer Größen,
wodurch solche Erzeugnisse aus Größen entstheen,
welche Groeßenzusammenstellungen sind,
die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und
die Methoden des Erschließens der ꝛc. ꝛc.

§ 74.

In vorigem ersten Hauptstücke beziehen sich die Methoden des Erschließens der Quan-

tität der Größen, die qualitativ bestimmt aber quantitativ noch unbekannt sind, auf solche, die in § 46. Erzeugnißgrößen genannt worden sind; aber in vorigem zweiten Hauptstücke beziehen sich die Methoden des Erschließens der Quantität quantitativ unbekannter Größen auf solche abhängige unbekannte Größen, die nicht blos dadurch, daß man aus Größen durch Vereinigung oder Zerlegung derselben geformte Größen bildet, sondern die dadurch entstehen, daß man Größenzusammenstellungen und zwar organische und unter diesen auch solche, die Gleichungen sind, erzeugt (§ 42. u. f.)

VII.

Spaltung des ersten Hauptstückes im zweiten Abschnitte des zweites Theils der allgemeinen Mathematik.

§. 75.

In Nr. IV. 1, B des ersten Abschnittes dieses Werkes ist erwogen worden, daß uns mehrere Formen eigenthümlich sind, worin wir Größen aus andern bilden und geformte Größen erzeugen können, und es sind dort die verschiedenen Formen des Bildens geformter Größen und die aus diesen hervorgehenden Arten

ten dieser Größen systematisch aufgesucht und hernach die Resultate in Nr. B, a der zu § 50 gehörenden Tabelle II zur leichtern Uebersicht derselben zusammengestellt worden.

Bey der nun vorzunehmenden systematischen Spaltung des ersten Hauptstücks, welches dem zweiten Abschnitte des zweiten Theils der allgemeinen Mathematik zugehört, scheint es, daß man diese Spaltung ohne Weiteres nach Anleitung der Nrn der eben erwähnten Tabelle vorzunehmen habe, welches aber nicht Statt haben kann, wie aus Folgendem erhellet:

1) Dadurch, daß wir in den verschiedenen uns eigenthümlichen Formen des Erzeugens der Größen aus andern formirte Größen bilden, ergiebt sich uns eine neue Unterscheidung, die wir bey Größen zu machen haben; wir müßen nämlich von da an die Größen noch eintheilen:

A) in solche, die nur schlechthin als Größen oder Quanta, also ohne alle Rücksicht auf die Art des Beisammenseyns ihrer Theile oder Einer, gedacht werden, und zwar in der einfachsten oder simpelsten Form, worin wir dieses können, und die wir deswegen simple Größen zu nennen haben;

B) in solche, die zwar auch nur schlechthin als Größen oder Quanta, aber nicht in der einfachsten Form, worin wir dieses können, sondern die auf gewisse Weise aus andern Größen oder Quantis durch Verei-

nigung oder Zerlegung derselben gebildet gedacht werden und die wir deswegen formirte Größen zu nennen haben.

2) In den Formen nun, in welchen wir uns simple Größen mit einander denken und aus ihnen formirte Größen erzeugen, können wir, da diese Formen allgemeine sind, selbst auch wiederum die von uns erzeugten formirten Größen ieder Art entweder mit simplen oder mit formirten Größen zusammen denken und aus diesen abermals formirte Größen bilden. Deswegen können die formirten Größen selbst wiederum eingetheilt werden:

A) in einfach formirte und B) in complicirt formirte.

3) Da nun bey dem Bilden formirter Größen aus andern, die selbst schon entweder alle, oder doch zum Theil formirte sind, besondere aus den einfachen Bildungsformen zusammengesetzte Formen und besondere Gesetze, an die wir uns bey diesen gebunden fühlen, Statt haben können; so müßen diese offenbar auch in den vorerwähnten Hauptstücken des zweiten Abschnitts des zweiten Theils der allgem. Math. in Untersuchung genommen und aufgestellt werden. Es folgt demnach, daß man, bevor man zu derienigen Eintheilung, die in Nr. B, a der zu § 50 gehörenden Tabelle **II** angewiesen ist, übergeht, das vorerwähnte Hauptstück erst in zwey Kapitel spalte und diese unter folgenden Titeln aufstelle:

Erstes Kapitel.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens formirter Größen aus

simplen Groeßen

u. s. w.

Zweites Kapitel.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens formirter Größen aus

formirten Groeßen

u. s. w.

§ 76.

Wenn wir nun die Eintheilung, welche die vorerwähnte Tabelle a. a. O. anweist, für die weitere Spaltung des vorigen ersten Kapitels anwenden und dabey erwägen, daß das Bilden formirter Größen aus simplen für alle die in Nr. A iener Tabelle angegebenen Verhältnisse, die zwischen mit einander gedachten simplen Größen Statt haben können, in Betrachtung genommen werden muß; so ergeben sich folgende

Spaltungen des ersten Kapitels des
ersten Hauptstücks im zweiten Abschnitte des zweiten Theils der
allgemeinen Mathematik.

Erste Kapitelabtheilung.

Allgemeine
Formen und Gesetze
des Bildens formirter Größen aus andern simplen
durch Vereinigung derselben.

I.

Vereinigung ungleicher Größen oder
Addition:

1) gleichartiger;	2) ungleichartiger;
A) unbenannter und zwar sowohl unbest. als auch best.;	A) einstimmiger und zwar sowohl unbest. als auch best.;
B) benannter unbest. und best.	B) entgegengesetzter unbest. und best.

Anmerk. Eine Eintheilung der ungleichartigen Größen in unbenannte und benannte kann nicht Statt haben, weil bey ungleichartigen Größen wenigstens eine aus benannten Einern bestehen muß. Was ferner diejenigen ungleichartigen Größen, die entgegen-

gesetzte sind, betrifft, so ist offenbar, daß diese schon durch die blose Bestimmung ihres Positiv- und Negativseyns zu den benannten Größen zu rechnen sind.

II.

Vereinigung gleicher Größen

1) gleicher Posten, oder Vervielfältigung, Multiplication;
   - A) unbenannter unbest. und bestimmter,
   - B) benannter unbest. und bestimmter.

2) gleicher Factoren, oder Erhebung, Erhöhung, Potenzirung;
   - A) unbenannter unbest. und bestimmter,
   - B) benannter unbest. und bestimmter, welche als Gegensätze anderer Größen gedacht werden.

Zweite Kapitelabtheilung.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens formirter Größen aus andern simplen durch Zerlegung derselben.

I.

Zerlegung in ungleiche Größen oder Subtraction.

1) Für gleichartige Größen;

A) unbenannte und zwar unbest. und bestimmte;

B) benannte und zwar unbest. und bestimmte.

2) Für ungleichartige Größen;

A) einstimmige und zwar unbest. und bestimmte;

B) entgegengesetzte unbestimmte und bestimmte.

Anm. Auch hier gilt rücksichtlich der ungleichartigen Größen die in Nr. I. der vorigen ersten Kapitelabtheilung beigefügte Anmerkung.

II.

Zerlegung in gleiche Größen.

1) In gleiche Posten.

A) Nach einem vorgeschriebenen Posten der zu zerlegenden Größe; Ausmessung, Demension.

B) Nach einer vorgeschriebenen Eintheilungszahl der zu zerlegenden Größe; Vertheilung, Partition.

In Nr. A und B

a) für unbenannte unbest. und best. Größen;

b) für benannte unbest. und best. Größen

2) In gleiche Factoren.

A) Nach einem vorgeschriebenen Potenzenexponenten; Erniedrigung, Wurzel-Extraction.

B) Nach einer vorgeschriebenen Wurzel oder Basis; Exponentiirung und Logarithmisirung.

In Nr. A und B

a) für unbenannte unbest. und best. Größen;

b) für benannte Größen, die als Gegensätze anderer Größen gedacht werden, und zwar für unbest. und best.

§ 77.

Wie in vorigem Sphen das erste von den beiden in § 75 angegebenen Kapiteln eingetheilt worden ist, eben so könnte nun auch das zweite von ienen Kapiteln eingetheilt werden. Da aber dieses vom Bilden geformter Größen aus andern, die selbst schon geformte sind, zu handeln hat und es verschiedenartig geformte Größen, z. B. Summen, Producte, Potenzen, Differenzen 2c. 2c. giebt, für welche die Formen und Gesetze des Vereinigens und Zerlegens derselben besonders in Betrachtung genommen und aufgestellt werden müßen; so ist es zweckmäßiger, wenn man in dem iezt einzutheilenden zweiten Kapitel nicht sogleich die verschiedenen Bildungsformen, wornach vorhin das erste Kapitel eingetheilt wurde, sondern zuvörderst die verschiedenen Arten einfach geformter Größen, für welche die Formen und Gesetze des Vereinigens und Zerlegens in diesem Kapitel aufzustellen sind, zum Eintheilungsgrunde desselben nimmt, und hernach erst iedes von den dabey sich ergebenden Eintheilungsgliedern nach den verschiedenen möglichen allgemeinen Formen des Vereinigens und Zerlegens der Größen auf die im vor. Sphen beobachtete Weise eintheilt. Die hier erwähnte Eintheilungsweise des vorgenannten zweiten Kapitels ist der ihr entgegengesetzten umgekehrten aus dem Grunde vorzuziehen, weil dadurch alle Regeln, die für einerley Gattung geformter Größen,

z. B. für Summen, Producte, aliquote Theile etc. etc. aufzustellen sind, in ein und dasselbe Abtheilungsglied des genannten Kapitels zusammen kommen müßen, da hingegen diese Regeln bey Anwendung der umgekehrten Eintheilung dieses Kapitels in verschiedene Glieder desselben zerstreut werden würden.

Die verschiedenen einfach geformten Größen aber, die sich durch die im vorerwähnten ersten Kapitel angegebenen Formen des Vereinigens und Zerlegens simpler Größen ergeben und wornach nun das zweite Kapitel einzutheilen ist, sind nach Nr. B a der zu § 50 gehörenden Tabelle II folgende:

Summen, — — — Differenzen,
Producte, — — — Quotienten und aliquote Theile,
Potenzen, — — — Wurzeln und Exponenten, wozu auch die Logarithmen gehören.

Von diesen acht Arten einfach geformter Größen sind die Summen und Differenzen und die Formen der Ausdrücke, worin man diese Größen schriftlich darzustellen hat, in dem Grade übereinstimmend, daß die Regeln für die Vereinigung und Zerlegung der Summen zugleich auf für die Differenzen gültig sind. Daher faßt man die Summen und Differenzen zur Verringerung der Glieder der Eintheilung des hier einzutheilenden zweiten Kapitels zu einer Gattung einfach geformter Größen zusam-

men und nennt sie mehrgliedrige und auch vorzugsweise zusammengesetzte Größen. Derselbe Umstand findet auch bey den Quotienten und aliquoten Theilen Statt und deswegen faßt man auch diese zwey Größenarten in derselben Absicht in dem eben erwähnten zweiten Kapitel zu einer Gattung zusammen und behandelt sie auf einmal unter dem Titel Brüche, wofür man auch den allgemeinern und daher auch mehr passenden Titel Divisionsgrößen setzen könnte.

Auf diese Weise sind in gedachtem zweiten Kapitel statt der vorerwähnten 8 Arten geformter Größen nur 6 Arten solcher Größen in Betrachtung zu nehmen und dieses ist zuvörderst nach diesen einzutheilen.

Rücksichtlich der weitern Eintheilung dieses Kapitels ist endlich noch Folgendes in Erwägung zu ziehen: Geformte Größen lassen sich auf gewisse Weise umformen, ohne daß dadurch ihr Werth verändert wird; z. B. die Summe a und b ist gleich der Summe b und a; das Product amalb ist gleich dem Producte bmala; u. s. w. Deswegen muß in der Lehre von dem Bilden geformter Größen aus geformten nicht blos das Vereinigen und Zerlegen, sondern auch das Umformen solcher Größen in Betrachtung genommen werden.

Allem Bisherigen zufolge erfordert der richtige systematische Gang folgende

Spaltung des zweiten Kapitels des ersten Hauptstücks im zweiten Abschnitte des zweiten Theils der allgemeinen Mathematik.

Erste Kapitelabtheilung.

Allgemeine Formen und Gesetze des Bildens formirter Größen aus mehrgliedrigen Groeßen.

I.

Durch Umbildung derselben.

II.

Durch Vereinigung derselben.

(Die weitere Spaltung, wie § 76 im ersten Kapitel.)

III.

Durch Zerlegung derselben.

(Die weitere Spaltung ebenfalls, wie in § 76.)

Und so müßen nun noch fünf Kapitelabtheilungen für die Producte, Potenzen, Divisionsgrößen, Wurzelgrößen und Exponenten, wozu die auch Logarithmen gehören, folgen, von welchen iede Abtheilung, wie die vorige erste, einzutheilen ist.

§ 78.

Hiermit ist die vorhin unter Nr. VII angekündigte Spaltung des dort genannten ersten Hauptstücks vollendet und es folgt nun die Spaltung des in § 73 angegebenen zweiten Hauptstücks.

VIII.

Spaltung des zweiten Hauptstückes im zweiten Abschnitte des zweiten Theils der allgemeinen Mathematik.

§ 79.

In § 38 ist gezeigt worden, daß die Größenzusammenstellungen, deren Betrachtung dem hier einzutheilenden zweiten Hauptstücke zugehört, entweder unorganische, Größenaggregate, oder organische, Größensysteme, sind. Deswegen müßen dem eben genannten Hauptstücke nothwendig zwey Kapitel gegeben werden, deren Titel auf folgende Weise aufzustellen sind:

Erstes Kapitel.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens solcher Größenzusammenstellungen,

welche Größenaggregate sind,

nebst den Methoden der Anwendung derselben.

Zweites Kapitel.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens solcher Größenzusammenstellungen,

welche Größensysteme sind,

die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und

die Methoden des Erschließens der ꝛc. ꝛc.

IX.

Spaltungen des ersten Kapitels des zweiten Hauptstücks im zweiten Abschnitte des zweiten Theils der allgemeinen Mathematik.

§ 80.

Nach § 79 gehören diesem Kapitel die unorganischen Größenzusammenstellungen zu, die nach § 46. in Permutations-, Combinations- und Variationsaggregaten beste-

hen. Hindenburg und andere ihm nachfolgende Mathematiker haben gezeigt, wie sich die Erkenntnisse von solchen Größenaggregaten zur Auflösung vieler wichtiger zur allgemeinen Mathematik gehörender Probleme anwenden lassen, und die Summe der Lehren von diesen Anwendungen hat den Titel combinatorische Analysis erhalten. Deswegen muß obgenanntes Kapitel auf folgende Weise eingetheilt werden:

Erste Kapitelabtheilung.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens solcher Größenzusammenstellungen, welche Groeßenaggregate sind.

I.

Von den

Permutationsaggregaten.

II.

Von den

Combinationsaggregaten.

III.

Von den

Variationsaggregaten.

Zweite Kapitelabtheilung

Anwendungen

der Lehren von den Größenaggregaten, oder die combinatorische Analysis.

§ 81.

Bey der Stellung und Eintheilung dieses Gliedes der allgemeinen Mathematik habe ich zu bemerken, daß dieienigen Mathematiker, die in diesem weiter, als ich, vorgerückt sind, das hier Fehlende noch zu verbessern und zu ergänzen haben.

X.

Spaltungen des zweiten Kapitels des zweiten Hauptstücks im zweiten Abschnitte des zweiten Theils der allgemeinen Mathematik.

§ 82.

Diesem Kapitel gehören nach § 79 die organischen Größenzusammenstellungen, die Größensysteme, zu. Diese sind aber nach § 42 Systeme aus gleichartigen ungleichen, oder Systeme aus gleichartigen gleichen Grö-

ßen, weswegen dem hier einzutheilenden zweiten Kapitel zwey Kapitelabtheilungen gegeben und die Titel derselben auf folgende Weise aufgestellt werden müßen:

Erste Kapitelabtheilung.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens solcher Größensysteme, welche Größenzusammenstellungen aus gleichartigen

und ungleichen Groeßen sind,

die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und die Methoden des Erschließens der rc. rc.

Zweite Kapitelabtheilung.

Allgemeine

Formen und Gesetze

des Bildens solcher Größensysteme, welche Größenzusammenstellungen aus gleichartigen

und gleichen Groeßen, oder,

welche Gleichungen sind,

die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und die Methoden des Erschließens der rc. rc.

§ 83.

Daß hier die Titel beider Kapitelabtheilungen mit dem in § 66 für den zweiten Theil der allgemeinen Mathematik angegebenen Titel

Titel übereinstimmend werden, das bringen die Größensysteme, die in diesen Kapitelabtheilungen in Betrachtung zu nehmen sind, mit sich.

XI.

Spaltungen der ersten Kapitelabtheilung des zweiten Kapitels des zweiten Hauptstücks im zweiten Theile der allgemeinen Mathematik.

§ 84.

Dieser Kapitelabtheilung gehören nach § 82 diejenigen Größenzusammenstellungen zu, worin gleichartige aber ungleiche Größen zu einem Größensysteme zusammengestellt sind. Dergleichen Größenzusammenstellungen aber können nach § 42 entweder zweigliederig, Verhältnißausdrücke, oder sie können mehrgliederig, Reihen, seyn. Diesemnach muß die hier einzutheilende erste Kapitelabtheilung folgende zwey Nrn erhalten:

I.

Allgemeine Formen und Gesetze

des Bildens solcher aus ungleichen gleichartigen Größen bestehender Größensysteme, welche sind zweigliederig oder Verhältnißausdrücke, die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte
ꝛc. ꝛc.

II.

Allgemeine Formen und Gesetze

des Bildens solcher aus ungleichen gleichartigen Größen bestehender Größensysteme, welche sind mehrgliederig oder Reihen (Series), die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte
ꝛc. ꝛc.

§. 85.

Daß auch diese zwey Arn wieder gehörig systematisch eingetheilt werden müßen und wie dieses geschehen müße, ist für solche Leser, denen die Lehre von den Verhältnißausdrücken, Progressionen und übrigen Reihen bekannt ist, leicht begreiflich.

XII.

Spaltungen der zweiten Kapitelabtheilung des zweiten Kapitels des zweiten Hauptstücks im zweiten Theile der allgemeinen Mathematik.

§ 86.

Dieser Kapitelabtheilung gehören nach § 82 alle diejenigen Größenzusammenstellungen zu, deren specifisches Wesen in § 42 bestimmt worden ist und die dort Gleichungen genannt worden sind. Diese Gleichungen sind aber nach § 42 entweder Verhältnißgleichungen (Proportionen) oder Größengleichungen, weswegen der hier einzutheilenden zweiten Kapitelabtheilung zwey Nrn zu geben sind, wie hier folgt:

I.

Allgemeine Formen und Gesetze

des Bildens solcher Gleichungen, welche Verhältnißgleichungen (Proportionen) sind, die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und die Methoden des Erschließens der rc. rc.

II.

Allgemeine Formen und Gesetze des Bildens solcher Gleichungen, welche Groeßengleichungen sind, die gesetzmäßigen Attribute dieser Producte und die Methoden des Erschließens der ꝛc. ꝛc.

§ 87.

1) Von diesen beiden Nrn muß nun iede wieder besonders systematisch eingetheilt werden. Jene Eintheilung der nach vor. Nr. I abzuhandelnden Proportionslehre, die man in den gewöhnlichen mathematischen Lehrbüchern angewendet findet, ist noch keineswegs so systematisch und vollständig, wie sie seyn sollte, welches wohl daher kommen mag, weil in diesen Lehrbüchern mehr auf Schulzweck, als auf streng wissenschaftliche Form Rücksicht genommen ist. Diese Eintheilung muß auf die Weise verbessert und erweitert werden, daß sich in ihr nebst der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri alle iene Rechnungsfälle, die man Reductions- und Kettenrechnungen nennt, nicht als blose Anhängsel, sondern als nothwendige Glieder eines systematisch eingetheilten Ganzen ergeben. Ob ich gleich im Besitze des Organismus der

Proportionslehre bin, so bin ich doch durch die der gegenwärtigen Schrift angewiesene Bogenzahl außer Stand gesetzt, sie hier mitzutheilen, weil der mir noch übrige Raum fast nicht mehr zu den ferneren Haupteintheilungen, die ich noch aufzustellen habe, zureichend ist.

2) Was die weitere systematische Eintheilung der vorigen Nr. II, welcher die Lehre von den Größengleichungen zugehört, anbelangt, so ist hierüber zuvörderst Folgendes zu bemerken: Diese Eintheilung giebt so viele Glieder, daß nicht nur ein Mangel an den zur deutlichen Bezeichnung derselben erforderlichen Titelzeichen eintreten würde, wenn man ohne alle Abänderung das bisher nöthig gewesene System der Bezeichnung der Titel der bisher erhaltenen Eintheilungsglieder weiter fortsetzen wollte, sondern daß auch dadurch der Leichtigkeit der Uebersicht des ganzen Organismus der allgemeinen Mathematik geschadet würde.

Man muß also, um den hier eintretenden Unbequemlichkeiten und den nachtheiligen Folgen derselben auszuweichen, von der nun einzutheilenden Nr. II an das bisher beobachtete System der Bezeichnung der Titel der Eintheilungsglieder aufgeben, muß sich merken, daß in dem bisher aufgestellten Organismus der allgemeinen Mathematik die Nr. II, welche von den Größengleichungen rc. rc zu handeln hat, das 2te Glied in der zweiten Kapitelabtheilung des zweiten Kapitels des zweiten Hauptstückes im zweiten Theile der allgemeinen

Mathematik ist (vergl. die Titel zu § 86 rc. rc.), muß durch Weglassung des Zeichens Nr. II das bisherige Bezeichnungssystem abbrechen und blos den Titel,

Theorie von den Groeßengleichungen

aufstellen und muß dann diese weiter in oberste Abtheilungen, in Theile, Abschnitte, Hauptstücke, Kapitel rc. rc. eintheilen.

Bey letzterem Titel hat man stets im Gedächtnisse zu behalten, daß in der durch ihn bezeichneten Lehre gehandelt werde:

Von den verschiedenen möglichen Arten der Größengleichungen, den gesetzmäßigen Attributen derselben und den Methoden, wie man aus den qualitativen Bestimmungen derjenigen in den Größengleichungen denkbaren abhängigen Größen, die zwar qualitativ bestimmt, aber noch quantitativ unbekannt sind, die Regeln für die Bestimmung ihrer unbekannten Quantität durch Schlüsse ableiten könne.

3) Wenn gefordert oder aufgegeben wird, man solle die unbekannte Quantität der einer Gleichung zugehörenden unbekannten abhängigen Größe aus den in der Gleichung ausgedrückten qualitativen Bestimmungen derselben ableiten, und man thut dieses, so heißt die Satz- und Schlußreihe, wodurch dieses geschieht, die Auflösung (Resolutio) der vorgelegten Aufgabe oder der vorgelegten Gleichung.

Weil nun in der Theorie von den Größengleichungen nach dem vorigen für diese angegebenen Inhaltstitel auch die Auflösungs- oder Resolutionsmethoden, nach welchen sich Aufgaben der eben erwähnten Art auflösen lassen, ausgemittelt und aufgestellt werden müßen; so hat man rücksichtlich dieser Auflösungsmethoden die Theorie von den Gleichungen auch die Auflösungskunst, oder besser, Auflösungswissenschaft genannt und sie durch das griechische Wort Analysis bezeichnet. Da aber dieses Wort auch in anderen Bedeutungen gebraucht wird, so muß man ihm, zur genauern Bestimmung desselben, das Beywort mathematisch beifügen. Weil ferner auch in andern Theilen der Mathematik, z. B. in der Geometrie, Methoden gelehrt werden, wie man aus den qualitativen Bestimmungen solcher Größen, die in Größensystemen als abhängige und unbekannte betrachtet werden, die Attribute und die Größe derselben durch Schlüsse bestimmen könne; so muß diejenige Analysis, die der allgemeinen Mathematik zugehört, eigentlich allgemeine mathematische Analysis genannt und dadurch von jener, die der Geometrie zugehört und die man geometrische nennt, unterschieden werden. Der Ausdruck Analysis wird aber meistens in einem etwas beschränkteren Sinne, als in dem bisher angegebenen, gebraucht, denn es spaltet sich, wie sogleich gezeigt werden wird, die allgemeine mathematische Analysis (im weitesten Sinne) in zwey große Hauptabtheilungen, von welchen man die erstere niedere Analysis und auch

Algebra, die andere aber höhere Analysis und vorzugsweise blos Analysis nennt.

XIII.

Eintheilung

der

Theorie von den Größengleichungen

oder der

allgemeinen mathematischen Analysis.

§ 88.

Die in solchen Größensystemen denkbaren unbekannten abhängigen Größen, für welche in der eben genannten Theorie nach § 49 Nr. 3 die Methoden des Erschließens ihrer unbekannten Quantität aus ihren in den Gleichungen angegebenen qualitativen Bestimmungen ausgemittelt und aufgestellt werden müßen, sind nach dem eben erwähnten Syhen

entweder solche, die in den Gleichungen, denen sie zugehören, unmittelbar oder selbst qualitativ bestimmt sind,

oder solche, bey welchen das Gegentheil auf die Weise Statt findet, daß die Gleichungen, statt der qualitativen Bestimmungen ihrer abhängigen unbekannten Größen selbst, nur qualitative Bestimmungen für die unbestimmt

großen Veränderungen oder Differenzen dieser Größen enthalten.

Da dieses ist, so muß die allgemeine mathematische Analysis in zwey Hauptabtheilungen eingetheilt werden, wie hier folgt:

Erste Hauptabtheilnng der allgemeinen mathematischen Analysis.

Theorie derienigen Größengleichungen, worin die unbekannten Größen selbst qualitativ bestimmt sind.

Zweite Hauptabtheilung der allgemeinen mathematischen Analysis.

Theorie derienigen Größengleichungen, worin die unbekannten Größen nicht selbst qualitativ bestimmt sind, sondern nur die Differenzen dieser Größen.

§ 89.

Die erste dieser beiden Hauptabtheilungen nennt man, wie bereits schon erinnert worden ist, niedere oder gemeine Analysis und auch Algebra. Die Ableitung des lezteren Ausdruckes kann ich hier aus Mangel an Raum nicht geben. — Die zweite der beiden vorerwähnten Hauptabtheilungen nennt man höhere

Analysis und auch, wie schon bemerkt worden ist, Analysis im engsten Sinne; auch wird sie Rechnung oder Analysis des Unendlichen oder Infinitesimalrechnung genannt, welche hier undeutlichen Ausdrücke nur im Vortrage der Lehren dieser Abtheilung gehörig verdeutlicht und begründet werden können.

Es ist nicht schwer zu begreifen, daß die Bezeichnung zweier wesentlich verschiedener und einander beigeordneter Abtheilungen einer Wissenschaft durch die Beiwörter niedrig und höher auf keinem wissenschaftlichen Grunde beruhen kann, daß diese Beiwörter nur aus den Schulen kommen, unwissenschaftlich und daher eigentlich zu verwerfen sind. Da indessen diese Ausdrücke einmal das Bürgerrecht erlangt haben, so mögen sie, besonders um ihrer Einfachheit willen, beibehalten werden.

Daß man die niedere Analysis vorzugsweise Algebra und Lehre von den Gleichungen nennt, das beruht ebenfalls auf keinen festen Gründen. Auch die höhere Analysis hat es mit Gleichungen zu thun und die wahre Bedeutung des Wortes Algebra paßt eigentlich auf die höhere Analysis eben so gut, wie auf die niedere.

XIV.

Eintheilung der ersten Hauptabtheilung der allgemeinen mathematischen Analysis, oder der niedern Analysis.

§ 90.

Dieser gehört nach § 88 iene erste Art von Größengleichungen zu, worin die quantitativ unbekannten abhängigen Größen unmittelbar oder selbst qualitativ bestimmt sind. Diese Gleichungen wollen wir von hier an vorzugsweise durch das Wort Größengleichungen bezeichnen, damit wir sie dadurch von iener zweiten Art der Größengleichungen, welche Differenzen der abhängigen unbekannten Größen enthalten und deswegen Differenzengleichungen heißen, unterscheiden. Von diesen Größengleichungen im engsten Sinne hat die niedere Analysis, nach der in § 87 am Ende der dortigen 2ten Nr. beigefügten Bemerkung, die verschiedenen denkbaren Gattungen und Arten derselben systematisch aufzustellen und hat die diesen zukommenden Attribute und auch die Methoden anzugeben, vermittelst welcher sich aus den in diesen Gleichungen enthaltenen qualitativen Bestimmungen der ihnen zugehörenden unbekannten

abhängigen Größen die unbekannte Quantität derselben durch Schlüsse ableiten läßt.

§ 91.

Es ist ohne Weiteres begreiflich, daß die niedere Analysis oder Algebra nach den verschiedenen möglichen Gattungen und Arten der ihr zugehörenden Betrachtungsobiecte, also der vorgenannten Größengleichungen, eingetheilt werden muß. Deswegen sind zuvörderst die obersten Gesichtspuncte aufzufassen, nach welchen diese Gleichungen in Betrachtung genommen und eingetheilt werden können.

§ 92.

Denken wir über diese Gesichtspuncte nach, so ergiebt sich, daß zwey derselben Statt haben. Wir können nämlich Größengleichungen in Betrachtung nehmen und von einander unterscheiden:

1) Rücksichtlich derienigen ihrer Größen oder Elemente, woraus sie gebildet sind, von welchen dieienige Größe abhängt, die in der Größengleichung als ein qualitativ bestimmtes abhängiges erzeugendes und deswegen auch als ein quantitativ unbekanntes Element x der Gleichung gedacht wird.

2) rücksichtlich desienigen Elements der Gleichung, welches auf die eben erwähnte Weise als eine von den übrigen Elementen abhängige Größe x gedacht wird.

§ 93.

Nehmen wir nun die Größengleichungen zuvörderst nach dem ersten der beiden vorerwähnten möglichen Gesichtspuncte in Betrachtung und erwägen, wie viele verschiedene Formen uns eigenthümlich sind, in welchen wir uns dieienigen Größen oder Elemente einer Gleichung, von welchen die unbekannte Größe x derselben abhängt, auf verschiedene Weise denken können, so ergiebt sich zuvörderst dieses:

1) Wir können uns diese Größen denken in der Form, daß iede von ihnen eine absolute oder bekannte Größe sey.

2) Wir können uns aber auch dieselben Größen in der Form denken, daß nicht iede von ihnen eine absolute oder bekannte Größe sey, sondern daß unter ihnen eine oder etliche Größen vorkommen, die selbst wieder von andern Größen abhängig und quantitativ unbekannt sind, und zwar entweder

A) auf die Weise, daß die Gleichungen, welche die qualitativen Bestimmungen dieser Größen enthalten, zur vollständigen Bestimmung

ihrer unbekannten relativen Quantität zureichend, oder

B) auf die Weise, daß diese Gleichungen zu dieser Bestimmung nicht hinreichend sind.

Im Falle Nr. A. werden die daselbst genannten Gleichungen bestimmte genannt, statt daß sie vollständig bestimmende heißen sollten, und im Falle Nr. B. nennt man diese Gleichungen unbestimmte, man sollte sie aber unvollständig bestimmende nennen.

§ 94.

Wegen der iezt angegebenen Verschiedenheiten haben wir die der niedern Analysis zugehörenden Größengleichungen in zwey oberste Gattungen, die zweite Gattung aber wieder in zwey Arten einzutheilen und haben hiernach die niedere Analysis selbst in zwey Theile und den zweiten Theil derselben wiederum in zwey Abschnitte auf folgende Weise zu spalten:

Der

niedern Analysis.

erster Theil.

Von den mit einer unbekannten Größe versehenen Größengleichungen.

Zweiter Theil.

Von den mit mehreren unbekannten Größen versehenen Größengleichungen.

Erster Abschnitt.

Von den mit mehreren unbekannten Größen versehenen Gleichungen, welche vollständig bestimmende sind.

Zweiter Abschnitt.

Von den mit mehreren unbekannten Größen versehenen Gleichungen, welche nicht vollständig bestimmende sind.

§ 95.

Wenn wir ferner die der niedern Analysis zugehörenden Größengleichungen auch nach dem zweiten von den in § 92 angegebenen Gesichtspuncten in Betrachtung nehmen und erwägen, welche verschiedene Formen uns zukommen, worin wir dasjenige Element einer Größengleichung, welches wir darin als eine von den übrigen Elementen abhängige unbekannte Größe x betrachten, denken können, so ergiebt sich Folgendes:

1) Wir können die eben genannten unbe-

kannte Größe x in einer Gleichung vorhanden denken in der Form, daß x nicht nur blos in der ersten Potenz in der Gleichung vorkommt, sondern daß sie auch, während man die Ableitung ihrer unbekannten Quantität aus ihren qualitativen Bestimmungen vornimmt, nicht in andern Potenzen hervortreten kann. — Solche Gleichungen nennt man eingradige.

2) Wir können uns aber auch die vorgenannte Größe x in einer Gleichung denken in der Form, daß ein Gegensatz von den in vor. Nr. angegebenen Merkzeichen der x Statt hat. — Gleichungen, die x auf solche Weise enthalten, werden mehrgradig genannt.

Die in einer solchen Gleichung denkbaren von der ersten Potenz der x verschiedenen Potenzen dieser Größe, welche die Gleichung entweder schon enthält, oder worauf sie bey den Schlüssen für die Bestimmung der Quantität der x führt, können ferner in folgenden verschiedenen Formen mit Exponenten versehen seyn:

A) Die Exponenten der Potenzen von x können alle ganze beiahte oder verneinte Zahlen seyn, in welchem Falle man die Gleichungen rationale nennt, und zwar können in diesen Gleichungen die Exponenten der Potenzen von x

a) alle gleiche Größe haben, in welchem Falle die rationalen Gleichungen reine genannt werden, oder es können die Exponenten der Potenzen von x

b)

b) verschieden groß seyn, in welchem Falle man die rationalen Gleichungen unreine nennt.

B) Die Exponenten der Potenzen von x können aber auch alle oder zum Theil gebrochene beiahte oder verneinte Zahlen seyn, in welchem Falle die Gleichungen irrationale genannt werden. Und auch hier können die Gleichungen wieder, wie in Nr. A, reine oder unreine seyn.

§ 96.

Wegen dieser verschiedenen möglichen Formen der Größe x haben wir den in § 94 angegebenen ersten Theil der niedern Analysis auf folgende Weise in Abschnitte, Hauptstücke und Kapitel abzutheilen:

Erster Abschnitt

des ersten Theils der niedern Analysis.

Von den mit einer unbekannten Größe versehenen Gleichungen, welche eingradig sind.

Zweiter Abschnitt.

Von eben solchen Gleichungen, welche mehrgradig sind.

Erstes Hauptstück.

Von den mehrgradigen Gleichungen, welche rationale sind.

Erstes Kapitel.

Von den rationalen Gleichungen welche reine sind.

Zweites Kapitel.

Von den rationalen Gleichungen welche unreine sind.

Zweites Hauptstück.

Von den mehrgradigen Gleichungen, welche irrationale sind.

Erstes Kapitel.

Von denen, welche reine sind.

Zweites Kapitel.

Von denen, welche unreine sind.

§ 97.

Wie die in einer Gleichung enthaltene eine unbekannte Größe x in den verschiedenen in § 95 angegebenen Formen in der Gleichung vorkommen kann, so können auch in den mit mehreren unbekannten Größen x, y, z 2c. 2c. versehenen vollständig oder unvollständig bestimmenden Gleichungen (§ 93, Nr. 2) die unbekannten Größen in denselben verschiedenen Formen (§ 95) enthalten seyn, weswegen nothwendiger Weise auch die hier genannten Gleichungen nach diesen Formen einzutheilen und die beiden in § 94 für sie angegebenen Abschnitte hiernach gehörig zu spalten sind.

XV.

Eintheilung der zweiten Hauptabtheilung der allgemeinen mathematischen Analysis oder der hoehern Analysis.

§ 98.

Dieser gehört nach § 88 iene zweite Art von Größengleichungen zu, worin die quantitativ unbekannten abhängigen Größen nicht unmittelbar oder selbst, sondern nur mittelbar, vermittelst der Differenzen derselben, qualitativ bestimmt sind, welche Gleichungen man, wie schon in § 90 bemerkt worden ist, Differenzengleichungen nennt und dadurch von den Größengleichungen im engsten Sinne, die der Gegenstand der niedern Analysis sind, unterscheidet. Von diesen Differenzengleichungen hat die höhere Analysis, nach der in § 87 am Ende der dortigen 2ten Nr. beigefügten Bemerkung, die verschiedenen denkbaren Gattungen und Arten derselben systematisch aufzustellen und hat die diesen zukommenden Attribute und auch die Methode anzugeben, vermittelst welcher sich aus den in diesen Gleichungen enthaltenen qualitativen Bestimmungen der Differenzen der ihnen zugehörenden unbekannten abhängigen

Größen die unbekannte Quantität derselben durch Schlüsse ableiten läßt.

Z. B. Man setze, drey Größen y, a, b stehen im Zusammenhange wechselseitiger Abhängigkeit und von diesen sey y als eine abhängige Größe, die Größen a und b aber seyen als absolute Größen angenommen. Man setze ferner, man wisse für diese Größen y, a, b das Gesetz ihrer wechselseitigen Abhängigkeit von einander nicht unmittelbar anzugeben, kenne also keine Gleichung zwischen diesen Größen, worin geradezu oder unmittelbar für die abhängige Größe y selbst die Art und Weise, wie sie mit den absoluten Größen a und b im Zusammenhange steht, bestimmt ist, man wisse z. E. nicht, daß $\frac{a}{y} = b^2$ oder $y = ab^2$ seyn muß; es sey demnach y zwar eine abhängige unbekannte, aber keine durch eine Gleichung unmittelbar oder selbst qualitativ bestimmte Größe. Man setze weiter, man wisse statt dessen doch von der Größe y anzugeben, daß, wenn man von den beiden sie bestimmenden absoluten Größen a und b der einen Größe a einen constanten Werth beilegt und die andere b hingegen als eine veränderliche Größe x betrachtet und nun diese um irgend ein beliebiges unbestimmtes Stück Dx wachsen läßt, allemal auch die y um eine Differenz $Dy = 2axDx + aDx^2$ wachsen müße. In diesem Falle ist die von a und x abhängige unbekannte Größe zwar nicht unmittelbar oder selbst, sie ist aber doch mittelbar, durch ihre Differenz Dy, in einer Differenzengleichung qualitativ bestimmt und somit im Kreise der abhän-

gigen unbekannten Größen unter allen übrigen ausgezeichnet. Diese Differenzengleichung $2ax\mathfrak{D}x + a\mathfrak{D}x^2$ nun ist eine der höhern Analysis zugehörende; diese hat von solchen Gleichungen zu zeigen, zu welcher Gattung und Art der verschiedenen möglichen Differenzengleichungen sie gehört, welche Attribute ihr zukommen müßen und durch welche Schlußmethode man aus den Qualitäten dieser Differenz $\mathfrak{D}y = 2ax\mathfrak{D}x + a\mathfrak{D}x^2$ ableiten kann, wie die Quantität von y aus a und x zu bestimmen, wie z. B. ausfindig zu machen sey, daß nothwendig die Größe $y = ax^2$ seyn müße, weil dieser Größe eine Differenz $\mathfrak{D}y = 2ax\mathfrak{D}x + a\mathfrak{D}x^2$ zugehören soll.

§ 99.

Bey den Differenzengleichungen denkt man sich, wie bereits gesagt worden ist, von der unbekannten und von andern absoluten Größen abhängigen Größe y ein beliebiges unbestimmtes Stück $\mathfrak{D}y$, um welches die y zu- oder abnehmen muß, falls man gewisse von den absoluten Größen a, b, c... als constant annimmt, sie also unveränderlich gewisse ihnen beigelegte Werthe behalten läßt, eine aber von diesen Größen, oder etliche derselben, als veränderliche absolute Größen x, z ꝛc. ꝛc. betrachtet und diese um ein beliebiges Stück $\mathfrak{D}x$, $\mathfrak{D}z$ ꝛc. ꝛc. wachsen oder abnehmen läßt. Man unterscheidet also hier zweierley absolute Größen, wovon y abhängt, constante a, b, c... und eine oder

etliche veränderliche absolute Größen x, z ꝛc. ꝛc. Da nun hierbey y als eine von a, b, c..., x, z... abhängige Größe gedacht wird, diese aber dabey, weil die Größen x, z... als veränderlich gedacht werden, auch noch als eine veränderliche zu denken ist, so unterscheidet man hier auch zweierley veränderliche Größen, nämlich solche, die zu den absoluten, von denen y abhängig ist, gehören und die man deswegen absolut veränderliche nennt, und noch eine veränderliche Größe y, welche von andern constanten und absolut veränderlichen Größen abhängig ist und die man deswegen abhängige und auch relativ veränderliche nennt. Weil die Veränderungen (die Zu- oder Abnahmen) der Werthe der relativ veränderlichen Größen y von den Werthsveränderungen der absolut veränderlichen Größen x, z... abhängig sind und sich nach diesen richten müßen, so sagt man auch von den Größen y, sie seyen Functionen der Größen x, z...

Da die höhere Analysis zu zeigen hat, wie sich für Functionen y aus den ihnen zu gehörenden und für sie gegebenen Differenzengleichungen solche Gleichungen ableiten lassen, welche bestimmen, wie die y von den absoluten Größen a, b, c..., x, z... abhängig ist und wie man deren Quantität für alle beliebigen Werthe der absoluten Größen zu bestimmen habe; so hat man der höhern Analysis auch den Titel Functionenlehre gegeben.

§ 100.

Weil in den zu Functionen y gehörenden Differenzengleichungen nur eine von den absoluten Größen a, b, c...., von denen y abhängig ist, als eine absolut veränderliche Größe x betrachtet seyn kann, aber auch mehrere von diesen Größen als absolut veränderliche Größen x, z.... angenommen seyn können und für Differenzengleichungen der letztern Art die Bestimmung der Methode, nach welcher sich die ihnen zugehörenden Functionen y aus ihnen ableiten lassen, nothwendig complicirter seyn muß, als für solche Differenzengleichungen, die nur eine absolut veränderliche Größe x enthalten; so ergiebt sich, daß man zuvörderst die höhere Analysis oder Functionenlehre in zwey Theile abzutheilen hat, wie hier folgt:

Der hoehern Analysis erster Theil.

Von den mit einer absolut veränderlichen Größe versehenen Differenzengleichungen und den ihnen zugehörenden Functionen.

Zweiter Theil.

Von den mit mehreren absolut veränderlichen Größen versehenen Differenzengleichungen und den ihnen zugehörenden Functionen.

§ 101.

Jede Function y ist von gewissen constanten Größen a, b, c..... und von einer oder mehreren absolut veränderlichen Größen x, z.... in einer gewissen Form abhängig. Diese Form besteht in gewissen von den verschiedenen mit Größen überhaupt oder Quantis vornehmbaren Vereinigungs- und Zerlegungsoperationen, die mit den absoluten Größen a, b, c...., x, z.... vorgenommen werden müßen, um aus ihnen eine formirte Größe zu erhalten, welche die Form der Function y ausdrückt und deren relative Quantität für alle und iede beliebige Werthe der absoluten Größen a, b, c.... x, z.... bestimmt.

Z. B. Die Form der Function $y = ax^2 + ax^3$ ist eine andere, als die der Function $y = ax^2$, oder die der Function $y = ax^2 + bz + c$.

§ 102.

So nun, wie die Functionen y auf mannigfaltige Weise in ihren Formen verschieden

seyn können, müßen nothwendig auch die Formen der ihnen zugehörenden Differenzengleichungen mannigfach und zwar dergestalt verschieden seyn,

„daß einer ieden Function y von bestimm-„ter Form eine Differenzengleichung zuge-„hört, deren Form durch die Form der Func-„tion y nothwendig bestimmt ist."

Das ist deswegen unumgänglich nothwendig, weil sich aus ieder Function y die ihr zugehörende Differenzengleichung Dy= ꝛc. ꝛc. nach einem allgemeinen Gesetze ableiten läßt, für diese Ableitung aber die Form desienigen Theiles einer bestimmten Function y, welcher aus absolut veränderlichen und nicht blos aus constanten Bildungselementen besteht und deswegen der veränderliche Theil der Function y heißt, die besonderen Operationen anweist, die man bey dieser Ableitung vorzunehmen hat.

Dieses allgemeine Gesetz der Ableitung einer Differenzengleichung Dy= ꝛc. ꝛc. aus ihrer Function y besteht in Folgendem:

„In der vorgegebenen Function y, woraus die „ihr zugehörende Differenzengleichung abgelei-„tet werden soll, lasse man die absolut ver-„änderlichen Größen x, z...., in x+Dx, „z+Dz,.... übergeben und erzeuge dadurch „aus y eine sogenannte Aenderungsfunc-„tion y'. In dieser nehme man dann mit „x+Dx, z+Dz, ꝛc. ꝛc. dieselben Operationen „vor, die durch die Form des veränder-

„lichen Theils der Function y für die absolut veränderlichen Größen x, z.... derselben „in diesem Theile vorgeschrieben sind, und „wenn dieses geschehen ist, so ziehe man die „y von der bereits erzeugten und gehörig entwickelten Aenderungsfunction y′ ab, wodurch „man dann die Differenz y′—y = Dy und einen aus a, b, c... x und Dx, z und Dz ꝛc. ꝛc. „formirten Ausdruck erhält, welcher die qualitativen Bestimmungen der Dy ausdrückt „und durch das Gleichheitszeichen mit Dy „verbunden die Differenzengleichung „Dy = ꝛc. ꝛc, giebt.

Z. B. Wenn man in der Function $y = ax^2 + b$ die absolut veränderliche Größe x in x + Dx übergehen läßt, so erhält man aus y die Veränderungsfunction $y' = a(x + Dx)^2 + b$. Nimmt man nun in dieser mit x + Dx würklich vor, was in y mit x vorgenommen ist, so erhält man $y' = ax^2 + 2axDx + aDx^2 + b$. Zieht man endlich von dieser Gleichung die Gleichung $y = ax^2 + b$ ab, so erhält man die Differenzengleichung y′—y oder $Dy = 2axDx + aDx^2$, deren Form durch die Form des veränderlichen Theils ax^2 der Function $ax^2 + b$ darum bestimmt ist, weil bey ihrer Ableitung mit x + Dx dieselbe Operation vorgenommen werden mußte, die in der Function $y = ax^2 + b$ mit x vorgenommen war.

§ 103.

Weil nach dem vorigen Sphen die Form des veränderlichen Theils einer Function

y als Grund von der Form der dieser Function y zugehörenden Differenzengleichung und die letztere Form als gesetzmäßige Folge der erstern zu betrachten und zugleich dabey ohne Weiteres leicht begreiflich ist,

„daß iede Veränderung der Form des veränderlichen Theils einer Function y „nothwendig auch eine Veränderung der Form „der zu dieser Function gehörenden Differenzengleichung zur Folge haben und „daß mithin zu ein und derselben Differenzengleichung nur ein einziger „veränderlicher Theil einer Function „y gehören muß;

so ist offenbar, daß sich ein ganz sicherer Rückschluß von der Form einer Differenzengleichung auf die Form des veränderlichen Theils der dieser Gleichung zugehörenden Function y machen läßt.

Da dieses ist, so entsteht nun weiter die sehr wichtige Frage nach den Mitteln, wodurch man in den Stand gesetzt werden könnte, aus der Form der Differenzengleichungen rückwärts auf die Formen der veränderlichen Theile der ihnen zugehörenden Functionen y zu schließen und dadurch diese Functionen zuvörderst wenigstens rücksichtlich ihrer veränderlichen Theile zu bestimmen.

§ 104.

Bey einigem Nachdenken über die hier in Frage genommenen Mittel ergiebt sich Folgendes:

„Wenn man die verschiedenen möglichen denkbaren Functionen nach bestimmten sie unterscheidenden Merkmalen in Classen, Gattungen und Arten eintheilt, wenn man für die so eingetheilten Functionen die ihnen zugehörenden Differenzengleichungen nach der in § 102 angegebenen Regel aus ihnen ableitet und hernach die specifischen sich auf einander beziehenden Merkzeichen, die zwischen der Grundform einer ieden besondern Art von Functionen und der Grundform der für diese aufgesuchten Differenzengleichungen Statt haben, gehörig ausmittelt und auffaßt; so muß sich dann die auf diesem Wege erzeugte Erkenntniß der zusammengehörenden Merkmale der Formen der Functionen und der zu diesen gehörenden Differenzengleichungen als Mittel anwenden lassen, wodurch man aus den besondern Merkzeichen der Formen vorgegebener Differenzengleichungen rückwärts auf die Formen, die den veränderlichen Theilen der zu diesen Gleichungen gehörenden Functionen zukommen müßen, schließen und diese bestimmen kann.“

Daraus ergiebt sich nun ohne Weiteres,

daß von den beiden in § 100 angegebenen Theilen der höhern Analysis ieder zwey Abschnitte erhalten muß, von welchen der erste die Bestimmung der verschiedenen möglichen Classen, Gattungen und Arten der Functionen und der diesen zugehörenden Differenzengleichungen, und der zweite die zusammengehörenden Merkmale der Formen der Functionen und ihrer Differenzengleichungen und die Methoden des Zurückschließens von den Formen der letzteren auf die der erstern und des Bestimmens derselben zum Gegenstande hat.

§ 105.

Zur Bestimmung der diesen beiden Abschnitten zu gebenden ganz vollständigen und möglichst deutlichen Titel und der weitern systematischen Eintheilungen derselben muß nun ferner Folgendes in Erwägung gezogen werden.

1) Nimmt man die dem ersten Abschnitte zugehörenden Betrachtungen vor, führt diese gehörig durch und vergleicht die dadurch erhaltenen Classen, Gattungen und Arten von Differenzengleichungen unter einander, so entdeckt man

A) folgende besondere Eigenschaft dieser Gleichungen:

a) Wenn diese zu Functionen y gehö-

ren, die nur von einer absolut veränderlichen Größe x abhängig sind.

„In ieder dieser Differenzengleichungen „kommt eine simple oder geformte „constante oder absolut veränderliche Größe G vor, die erhalten wird, „wenn man die Differenz Dy der Function y durch die Differenz Dx der absolut veränderlichen Größe x dividirt und „wenn man dann aus dem für $\frac{Dy}{Dx}$ erhaltenen Ausdrucke alle Glieder, welche Dx „enthalten, wegstreicht; und dieser der „Differenz Dy zugehörenden und von Dx „ganz unabhängigen Größe G kommt „folgende besondere Eigenthümlichkeit zu:

„„Die Form derselben ist eben so specifisch, wie die Form der vollständigen Differenz Dy selbst, durch „„die Form der Function y bestimmt, „„so, daß sich, wenn man das Gesetz „„des Zusammenhanges der Form dieser „„Differenzengröße G mit der Form der „„zugehörenden Functionen kennen gelernt „„hat, blos schon aus der Form dieser „„Größe G zurück auf die Form des „„veränderlichen zur Differenzengleichung „„gehörenden Theils der Function schließen läßt, und daß man demnach die „„Differenzengleichung gar nicht vollständig, sondern nur die oberwähnte „„ihr zugehörende Größe G zu wissen „„nöthig hat, um den veränderlichen

„„Theil derienigen Function y, die ihr
„„zugehört, zu erschließen.

Diese in ieder Differenzengleichung enthaltene Größe G, die nach der oberwähnten Regel aus $\frac{\mathfrak{D}y}{\mathfrak{D}x}$ ausgehoben werden kann, nennt man das Differential der Function y von x und bezeichnet sie durch dy. Differential wird sie deswegen genannt, weil sie den kleinstmöglichsten Werth (das Minimum) angiebt, welchen der für den Quotienten $\frac{\mathfrak{D}y}{\mathfrak{D}x}$ nach obiger Regel erhaltene Ausdruck in dem Falle erhält, wenn man in allen Gliedern desselben, die Dx enthalten, diese Differenz Dx bis zu o abnehmen läßt.

Z. B. Für die Function $y = ax^2 + b$ ist in § 98 die Differenzengleichung $\mathfrak{D}y = 2ax\mathfrak{D}x + a\mathfrak{D}x^2$ gefunden worden. Dividirt man diese durch Dx, so erhält man $\frac{\mathfrak{D}y}{\mathfrak{D}x} = 2ax + a\mathfrak{D}x$ und dieser Ausdruck enthält die Größe $G = 2ax$, die von Dx ganz unabgängig ist. Diese Größe 2ax, ist hier dieienige, von deren Form man eben so gut, wie von der Form der ganz vollständigen Differenz $\mathfrak{D}y = 2ax\mathfrak{D}x + a\mathfrak{D}x^2$ auf die Form des ververänderlichen Theils ax^2 der Function $y = ax^2 + b$ zurückschließen kann, es ist hier 2ax das Differential dy der Function $y = ax^2 + b$ und zwar deswegen, weil hier 2ax das Minimum des für $\frac{\mathfrak{D}y}{\mathfrak{D}x}$ erhaltenen Ausdrucks $2ax + a\mathfrak{D}x$, welches durch die Verminderung der Dx bis zu o entstehen muß angiebt.

b) Wenn die Differenzengleichungen zu Functionen y gehören, die von meh-

mehreren absolut veränderlichen Größen x, z.... abhängig sind.

„In ieder von solchen Differenzengleichun„gen kommen ebenfalls Größen G, G' rc. „vor, welchen die in vor. Nr. a ange„gebene Eigenthümlichkeit zukommt und „die man ebenfalls Differentialien „nennt."

B) Der in voriger Nr. A erwähnte Umstand, daß man die Differenzengleichungen gar nicht vollständig zu kennen nöthig hat, um aus ihnen die veränderlichen Theile der ihnen zugehörenden Functionen y zu erschließen, sondern daß schon die Erkenntniß der in diesen Gleichungen enthaltenen Differentialien der Functionen y zu diesem Zwecke zureicht, ist für die Anwendungen der höhern Analysis zur Auflösung mathematischer Aufgaben von so großer Wichtigkeit, daß der größte Theil dieser Anwendungen gar nicht Statt haben könnte, wenn der eben erwähnte Umstand nicht Statt hätte, wie aus Folgendem erhellet.

„In solchen Fällen, in welchen man eine „unbekannte abhängige Größe y, wofür man „die Regel der Bestimmung ihrer rela„tiven Quantität auszumitteln hat, „nicht unmittelbar oder selbst quali„tativ durch eine Gleichung zu bestimmen „im Stande ist und also auch die Regel „der Bestimmung ihrer relativen „Quantität nicht nach den Lehren der

„niedern Analysis aus einer solchen „Gleichung ableiten kann, sondern genöthigt „ist, die y nur mittelbar, durch eine „für sie aufzusuchende Differenzenglei„chung Dy = 2c. 2c., qualitativ zu be„stimmen und dann aus dieser Differenzen„gleichung nach den Lehren der höhern „Analysis den Ausdruck für y, welcher „die Regel der Bestimmung ihrer rela„tiven Quantität angiebt, abzuleiten, „in solchen Fällen, sage ich, ist man mei„stens auch nicht im Stande, einen „ganz vollständig bestimmten Aus„druck für die Differenz Dy der Grö„ße y ausfindig zu machen. Statt „dessen aber kann man doch allemal in „den Fällen, in welchen man Bestim„mungen für Dy anzugeben weis, die Dy „wenigstens in solchem Grade voll„ständig qualitativ bestimmen, daß man „mit Sicherheit weis, der für Dy angeb„bare Ausdruck enthalte wenigstens das „in vor. Nr. A erwähnte Differential „G, oder die Differentialien G, G′ 2c. 2c. „der zu suchenden Functionen y ganz voll„ständig ausgedrückt in sich. Da nun „nach vor. Nr. A die Differentialien „unbekannter Functionen y eben so gut, wie „die vollständigen Differenzenglei„chungen derselben, zur Entdeckung der ver„änderlichen Theile dieser Functionen ge„braucht werden können, so ist aus dem „Bisherigen offenbar, daß die obige Be„merkung richtig ist.“

Die hier bemerklich gemachte große Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit der Differentialien der Functionen macht es nothwendig, daß in iedem ersten von den beiden in § 104 erwähnten Abschnitten, in welche nach den dortigen Erwägungen ieder Theil der höhern Analysis abzutheilen ist, nicht blos die verschiedenen Classen, Gattungen und Arten der Functionen und der diesen zugehörenden Differenzengleichungen, sondern nebst dem auch noch die diesen Gleichungen und ihren Functionen zugehörenden Differentialien in Betrachtung genommen werden müßen, weswegen dieses auch in den für diese Abschnitte aufzustellenden Titeln bemerklich zu machen ist. Weil in den eben genannten ersten Abschnitten die Bestimmung der Differentialien dy der Functionen y und die Erkenntniß der Formen derselben der Hauptzweck ist, so hat man den Inhalt dieser ersten Abschnitte der beiden Theile der höhern Analysis durch das Wort Differentialrechnung bezeichnet.

C) Functionen y sind aus andern absoluten Größen erzeugt, gehören also zu den formirten Größen. Von solchen Größen aber ist schon am Ende des 77sten §phens erwähnt worden, daß sie sich in verschiedenen Formen darstellen lassen, ohne daß dadurch ihr Werth verändert wird. Da nun nach dem Vorhergehenden die Formen der Functionen y die Formen der ihnen zugehörenden Differenzengleichungen und Differentialien bestimmen und die Erkenntniß der Gesetze des Zusammenhanges dieser Formen ein

Hauptgegenstand der höhern Analysis seyn muß, weil man durch diese in den Stand gesetzt wird, von der Form einer vorgegebenen Differentialgleichung oder eines vorgegebenen Differentials einer noch unbekannten Function y auf die Form des veränderlichen Theils derselben rückwärts zu schließen und diesen dadurch zu bestimmen; so ist offenbar nothwendig, daß in den vorerwähnten ersten Abschnitten eines ieden der beiden Theile der höhern Analysis zugleich auch noch auf die verschiedenen möglichen Umformungsweisen der Functionen y besondere Rücksicht genommen und daß auch dieses in den für diese Abschnitte aufzustellenden Titeln bemerklich gemacht werde.

2) In den zweiten Abschnitten der beiden Theile der höhern Analysis sind nach § 104 die Methoden des Zurückschließens von den Formen der Differenzengleichungen auf die Formen der diesen zugehörenden Functionen und des Bestimmens derselben in Betrachtung zu nehmen. Da aber nach § 102 und 103 die Form einer Differenzengleichung nur durch die Form des veränderlichen Theils einer Function bestimmt ist, weil der unveränderliche Theil derselben auf die Veränderung Dy einer Function y keinen Einfluß haben kann, so kann auch aus der Form einer Differenzengleichung nur auf die Form des veränderlichen Theils der ihr zugehörenden Function y zurückgeschlossen und dieser dadurch bestimmt werden. Es sind demnach nebst den Untersuchungen über die Bestimmungsweisen der

veränderlichen Theile quantitativ unbekannter aber vermittelst ihrer Differenzen qualitativ bestimmbarer Functionen y noch besondere Untersuchungen über die Methode nöthig, nach welcher sich bestimmen läßt, ob einer Function y, deren veränderlicher Theil bereits vermittelst ihrer Differenz Dy erschlossen worden ist, auch noch ein constanter Theil zugehört und welcher dieser ist.

Diesemnach muß offenbar ieder von den oberwähnten zweiten Abschnitten der beiden Theile der höhern Analysis zwey Hauptstücke erhalten, von welchen das erste von der Bestimmungsweise des veränderlichen und das zweite hingegen von der Bestimmungsweise des constanten Theils solcher Functionen y handelt, die quantitativ unbekannt aber qualitativ vermittelst ihrer Differenzen Dy bestimmbar sind.

Weil ferner nach dem, was in voriger Nr. 1 beigebracht worden ist, nicht blos von den Differenzen Dy sondern auch von den Differentialien dy ein Rückschluß auf die veränderlichen Theile der Functionen y möglich ist und diese dadurch bestimmbar sind und die Differenzen Dy unbekannter Functionen y nur selten ganz vollständig und bestimmt angegeben werden können, dieses aber bey den Differentialien dy der Functionen nicht der Fall ist; so ergiebt sich, daß in den vorerwähnten ersten Hauptstücken der 2ten Abschnitte der beiden Theile der höhern Analysis vornehmlich nur die Methoden in Betrachtung zu nehmen und anzugeben sind, nach welchen sich aus den Differentialien dy der Func-

tionen y die veränderlichen Theile derselben ableiten lassen.

Eine Differenz Dy einer Function y ist ein beliebiger unbestimmter Theil von y und ein Differential dy von y ist eine der Dy zugehörende Größe (Nr. 1, A). Also steht eine Function y ihrer Dy und ihrem dy entgegen, wie ein Ganzes (integrum) seinem Theile entgegen steht. Deswegen wird auch y in Beziehung auf Dy und dy das Integral von Dy und dy genannt. Daher kommt es auch, daß man das Ableiten der y aus Dy oder dy das Integriren oder die Integration der Dy oder des dy nennt und die 2ten Abschnitte der beiden Theile der höhern Analysis durch das Wort Integralrechnung bezeichnet.

§ 106.

Theilt man die höhere Analysis nicht erst, wie in § 100 geschehen ist, nach der Verschiedenheit der Functionen y, die entweder nur von einer absolut veränderlichen Größe x, oder von mehreren solchen Größen x, z... abhängen können, in zwey Theile ein, sondern faßt vielmehr beide Gattungen von Functionen zusammen, so muß diese Analysis nach den im vorigen §phen angestellten Betrachtungen in zwey Theile zerlegt werden, von welchen der erste die Differentialrechnung und der zweite die Integralrechnung enthält. Das ist die gewöhnliche Eintheilungsweise der höhern Ana-

lysis. Es ist aber für den Vertrag derselben zweckmäßiger, wenn man sie zuerst, wie in § 100, nach der Verschiedenheit der Functionen rücksichtlich der Anzahl ihrer absoluten Größen in zwey Theile abtheilt und hernach iedem dieser Theile zwey Abschnitte giebt, von welchen der erste die Differential- und der zweite die Integralrechnung enthält.

Nach dieser Eintheilung und dem, was im vorigen Sphen beigebracht worden ist, sind nun die beiden in § 104 erwähnten Abschnitte eines ieden von den zwey dort genannten Theilen der höhern Analysis unter folgenden Titeln aufzustellen und auf folgende Weise zu spalten:

Des ersten Theils
der
hoehern Analysis
erster Abschnitt.

Ableitung und Formarten
der
Differenzen und Differentiale,
welche den von einer absolut veränder-
lichen Größe abhängigen Functionen zugehören,
oder
Differenzen- und Differential-Rechnung
für die hier genannten Functionen.

Erstes Hauptstück.
Vorbereitungslehre.
Von den
Formen der Functionen
y von x.

Erstes Kapitel.
Eintheilung
dieser Functionen nach ihren Grundformen.

Zweites Kapitel.

Umformungsweisen,

die sich mit diesen Functionen vornehmen lassen.

Zweites Hauptstück.

Die vorbereitete Lehre.

Von der

Ableitung und den Formarten

der

Differenzen und Differentiale

der Functionen y von x selbst.

Zweiter Abschnitt.

Ableitung und Formarten

der

Functionen oder Integrale,

welche den von einer absolut veränderlichen Größe abhängigen

Differenzen und Differentialen

zugehören,

oder

Integral-Rechnung

für die hier genannten Differenzen und Differentiale.

Erstes Hauptstück.

Bestimmung
der
veränderlichen Theile
dieser Functionen.

Zweites Hauptstück.

Bestimmung
der
constanten Theile
dieser Functionen.

Des zweiten Theils
der
hoehern Analysis
erster Abschnitt.

Ableitung und Formarten
der
Differenzen und Differentiale,
welche den von mehreren absolut veränderlichen Größen abhängigen Functionen zugehören,
oder
Differenzen- und Differential-Rechnung
für die hier genannten Functionen.

Die weitere Eintheilung dieses zweiten Theils und die Bestimmung der Titel seiner

Eintheilungsglieder ist durch die bereits angegebene Eintheilung des ersten Theils gegeben, weil sie nach diesem einzurichten ist.

§ 107.

Hiermit ist die auf richtige Eintheilungsgründe gestützte Darstellung des Organismus der allgemeinen Mathematik vollendet und es muß nun eben so auch für die besondere Mathematik gezeigt werden, wie diese nach feststehenden Eintheilungsgründen zu organisiren sey. Da aber die diesem Werke vorgeschriebene Bogenzahl bereits schon überschritten ist, so kann ich mich hier nur noch auf eine beschränkte Vorzeichnung der Haupteintheilungen der besondern Mathematik einlassen.

XVI.

Eintheilung der besondern Mathematik.

§ 108.

Alle iene Betrachtungen und Untersuchungen, die der Mathematik, zufolge des in § 60 von dieser Wissenschaft erzeugten Begriffes, zugehören, hat die besondere Mathematik für

die verschiedenen besondern Arten von Größen anzustellen, die wir nach den verschiedenen uns ursprünglich zum Vorstellen solcher Größen zukommenden Vorstellungsformen zu denken fähig sind. Nach diesen Formen aber haben wir, wie in § 13 gezeigt worden ist, alle von uns denkbaren besondern Arten von Größen in zwey Gattungen, in extensive und intensive Größen, einzutheilen. Diesem zufolge müßte die nach den verschiedenen Gattungen ihrer Objecte einzutheilende besondere Mathematik zuerst in zwey Haupttheile, in die Lehre von den extensiven und in die von den intensiven Größen, zerlegt werden. Dieser zweite Haupttheil der besond. Math. ist aber noch nicht aufgestellt und bearbeitet worden, daher die besondere Mathematik bis iezt nur noch eine Wissenschaft von extensiven Größen ist.

§ 109.

Als diese Wissenschaft hat sie, weil die extensiven Größen nach § 13 in räumlich und zeitlich extensive, die dort expansive und protensive genannt wurden, einzutheilen sind, iede Art dieser Größen in Betrachtung zu nehmen und sie müßte also in dieser Rücksicht abermals in zwey Theile abgetheilt werden. Aber auch von diesen ist der zweite Theil, dem die protensiven Größen zugehören, noch nicht besonders aufgestellt und bearbeitet worden, daher die besondere Mathematik bis iezt

nur noch eine Wissenschaft von den räumlich ausgedehnten oder expansiven Größen ist. Als solche wird sie Geometrie genannt, über welche Benennung schon in § 65 das Nöthige beigebracht worden ist.

Diesemnach besteht die nun weiter folgende Eintheilung der besondern Mathematik blos in der

Eintheilung der Geometrie.

§ 110.

Diese hat zufolge dessen, was im Anfange des 108ten Sphens bemerkt worden ist, alle jene in § 60 angegebenen Betrachtungen und Untersuchungen, die der Mathematik zugehören, besonders für die expansiven Größen anzustellen. Faßt man die dort angegebenen Puncte gehörig auf und setzt die Summe derselben mit den Bestimmungen des Begriffs Geometrie, die man in den Lehrbüchern der Geometrie angegeben findet, in Vergleichung, so wird sich die Mangelhaftigkeit und unsystematische Zusammenstellung dieser Bestimmungen von selbst ergeben. Unter diesen kommt gewöhnlich die durch das Wort Lage bezeichnete vor, worauf man ein besonderes Gewicht zu legen scheint; diese findet sich freilich nicht unter den allgemeinen in § 60 angegebenen Bestimmungen der Gegenstände der Mathematik unmittelbar, sie ist aber darin enthalten mittelbar, denn

sie ist ein Betrachtungspunct, der aus den uns ursprünglich eigenthümlichen Formen des Miteinanderdenkens expansiver Größen mit Nothwendigkeit hervorgeht.

§ 111.

1) Nach § 15 sind uns ursprünglich zwey oberste Formen eigenthümlich, worin wir uns expansive Größen vorstellen und denken; wir stellen uns nämlich Theile des uns umgebenden Raumes, die wir körperliche Räume nennen, und verschiedene Gränzen, in welchen diese Theile im Raume aufhören, vor und sind berechtigt, die eben genannten expansiven Größen als zwey einander entgegengesetzte Gattungen zu betrachten. Demnach ist die Geometrie rücksichtlich dieser beiden einander entgegengesetzten Gattungen ihrer Betrachtungsobiecte in zwey Theile einzutheilen, von welchen der eine die Gränzen der körperlichen Räume und der andere die körperlichen Räume selbst in Betrachtung zu nehmen hat.

2) Es sind uns aber auch nach § 15 noch zwey einander entgegengesetzte Vorstellungsformen eigenthümlich, worin wir uns die ausgedehnten Gränzen der körperlichen Räume, die Linien und Flächen, und die von diesen begränzten körperlichen Räume selbst auf entgegengesetzte Weise vorstellen können und die uns berechtigen, die Linien in zwey Gattungen, in gerade und krumme, die Flächen in zwey

Gattungen, in ebene und gebogene und die körperlichen Räume ebenfalls in zwey Gattungen, in solche, die blos von geraden Linien und ebenen Flächen begränzt sind, und in solche, bey welchen das Gegentheil hiervon Statt findet, einzutheilen. Auch rücksichtlich dieser zwey einander entgegengesetzten Gattungen der Obiecte muß die Geometrie in zwey Theile eingetheilt werden, von welchen dem einen die geraden Linien, ebenen Flächen und die von solchen Linien und Flächen begränzten Körper, dem andern aber die Gegensätze der eben genannten Obiecte zugehören.

3) Bey diesen in Nr. 1 und 2 angegebenen verschiedenen Eintheilungsgründen der Geometrie, von welchen ieder fordert, daß diese Wissenschaft in zwey Theile gespalten werde, entsteht nun zuvörderst die Frage, welcher von diesen als der oberste Eintheilungsgrund zu betrachten und zu wählen sey. Die Vorstellbarkeit der Gränzen körperlicher Räume ist ganz offenbar die Bedingung der Möglichkeit der Eintheilung der Expansionsgrößen in zwey Gattungen, in Gränzen körperlicher Räume, und in solche Räume selbst. Da nun die Bedingung nothwendiger Weise höher steht, als das Bedingte, so ist ohne Weiteres nothwendig, daß bey der Eintheilung der Geometrie zuerst auf die verschiedenen uns eigenthümlichen Formen des Vorstellens der Gränzen körperlicher Räume und auf die Producte dieser Vorstellungsformen, also auf die in vor. Nr. 2 genannten einander entgegenge-

setzten Gattungen von Objecten, Rücksicht genommen, mithin die Geometrie zuvörderst nach diesen in zwey Theile, wie in Nr. 2 angegeben ist, abgetheilt werde.

§ 112.

1) Ob aber gleich nach dem Bisherigen die Geometrie zuvörderst nach den entgegengesetzten Beschaffenheiten der Linien, Flächen und Körper in zwey Theile zu spalten ist, so kann doch der Inhalt dieser beiden Theile nicht völlig genau in dem Grade geschieden und bestimmt werden, daß man setz-, der erste Theil der Geometrie habe nur solche Expansionsgrößen in Betrachtung zu nehmen, bey welchen gerade und ebene Expansion Statt findet, dem zweiten Theile aber gehören alle diejenigen Expansionsgrößen zu, bey welchen krumme und gebogene Expansionsform Statt hat. Hiervon liegt der Grund in Folgendem:

A) Unter den gesetzmäßig gekrümmten Linien kommt die Kreislinie vor, deren Krümmungsgesetz das einfachste unter allen ist, nach welchen wir uns dergleichen Linien gesetzmäßig erzeugt denken können. Ferner kommt unter den gesetzmäßig gebogenen Flächen die Kugeloberfläche vor, deren Krümmungsgesetz ebenfalls das einfachste unter allen ist, nach welchen wir uns Flächen gesetzmäßig gebogen denken

ken können. Zur Vorstellung solcher krummer Linien und gebogener Flächen und Aufstellung der Begriffe von ihnen fühlt man sich aber schon genöthigt, wenn man, nach den Forderungen des streng systematischen Ganges in der Geometrie, sogleich im Anfange derselben die Lehre von der Lage solcher Gränzen gegen einander, die Puncte sind, abhandeln will. Schon dieses zeigt, daß man der Vorstellung und dem Begriffe von Kreislinie und Kugeloberfläche im ersten Theile der Geometrie unmöglich ausweichen kann und daß also diese beiden Gegenstände, obschon sie nach der in § 110, Nr. 2 angegebenen Spaltung der Geometrie dem dort genannten zweiten Theile derselben zugehören, doch wenigstens der Vorstellung und den Begriffen nach und also auch rücksichtlich gewisser mit diesen zunächst verwandter Begriffe im ersten Theile der Geometrie gänzlich unentbehrlich sind, daß mithin die Geometrie nicht in dem Grade scharf, wie in § 110, Nr. 2 angegeben ist, nach den verschiedenen Beschaffenheiten der Linien, Flächen und Körper in zwey Theile gespalten werden kann, sondern daß bey dieser Spaltung eine Modification eintreten muß. Schreitet man aber im ersten Theile der Geometrie von der Lehre von der Lage der Puncte gegen einander weiter zu den Lehren von den Winkeln und Figuren fort, so findet man, daß man hier nicht einmal mehr mit dem blosen Begriffe von der Kreislinie und gewissen damit verwandten Begriffen ausreicht, sondern daß man, um die eben ge-

nannten Lehren vollständig aufzustellen und durch zu führen, weitere Kenntnisse von den Attributen der Kreislinie und den Theilen derselben, von der von ihr eingeschlossenen Ebene und den in dieser und außer derselben mit ihr verbindbaren geraden Linien nöthig hat und daß ferner auch die Kreislinie und die von ihr eingeschlossene Ebene in der Lehre von den geradlinigen gleichseitigen und vielwinkelichen Figuren oder den regulären Polygonen näherungsweise als diejenige letzte Art regulärer Polygone, die aus unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten bestehen, in Betrachtung genommen werden kann. Das hat zur Folge, daß man dem ersten Theile der Geometrie die ganze Lehre von der Kreislinie so weit einzuverleiben hat und daher auch würklich einverleibt, als sich diese ohne eine gewisse besondere Betrachtungsweise der krummen Linien, die bey diesen im zweiten Theile der Geometrie angewendet wird, vortragen läßt. Rücksichtlich der eben berührten besondern nur dem zweiten Theile der Geometrie eigenthümlichen Betrachtungsweise aber gehört die Kreislinie dann auch noch diesem zweiten Theile als besonderer Betrachtungsgegenstand zu. Es finden also gewisse elementarische Erkenntnisse der Kreislinie Statt, die der erste Theil der Geometrie als unumgängliche Bedingungen der Möglichkeit der vollständigen Aufstellung aller ihm zugehörenden Erkenntnisse fordert, es giebt aber auch noch andere Erkenntnisse von der Kreislinie, die auf einer besondern Betrachtungsweise, welche der

Lehre von den Curven im zweiten Theile der Geometrie zum Grunde gelegt wird, beruhen und in deren Rücksicht die Kreislinie auch diesem zweiten Theile als Betrachtungsgegenstand zugehört.

B) Jene Erkenntnisse von der Kreislinie, die der erste Theil der Geometrie als sein Eigenthum fordert, reichen zu, die Lehre von den kreisförmig gebogenen Flächen und den Körpern, die, wie die Cylinder, Kegel und Kugeln, solche Flächen zu Gränzen haben, aufzustellen, ohne daß man dieser Lehre eine besondere Betrachtungsmethode der gebogenen Flächen und der von solchen Flächen begränzten Körper zum Grunde zu legen nöthig hat, wie es im zweiten Theile der Geometrie rücksichtlich aller übrigen gebogenen Flächen und der von diesen begränzten Körper erforderlich ist. Daher kommt es, daß man im ersten Theile der Geometrie auch die Lehren von den kreisförmig gebogenen Flächen der Cylinder, Kegel und Kugeln und von diesen Körpern selbst so weit aufgestellt, als es ohne die besondere dem zweiten Theile der Geometrie eigenthümliche Betrachtungsweise der diesem zugehörenden Gegenstände geschehen kann, daß man aber die letzteren Gegenstände dann auch noch besonders im zweiten Theile der Geometrie nach der diesem eigenthümlichen Methode in Betrachtung nimmt.

2) Dem in vor. Nr. 1 Beigebrachten zufolge gehören dem ersten Theile der Geometrie nicht blos diejenigen Expansionsgrößen zu,

bey welchen geradlinige Expansion Statt hat und also auch die bey ihnen vorzustellenden Flächen ebene sind, sondern es gehört auch zu eben diesem Theile der Geometrie die Betrachtung aller kreisförmig expandirten Größen, so weit diese ohne die dem zweiten Theile der Geometrie eigenthümliche Methode des Betrachtens seiner Obiecte möglich ist.

§ 113.

Den ersten Theil der Geometrie pflegt man niedere und auch Elementar-Geometrie und den zweiten hingegen höhere Geometrie zu nennen, welche Ausdrücke, ob sie gleich nicht ganz wissenschaftlich gewählt sind, beibehalten werden müßen, weil sie bereits das Bürgerrecht erhalten haben.

§. 114.

Durch alles das, was von § 108 an bis hierher beigebracht wurde, ist vollständig deutlich, daß die besondere Mathematik bis iezt blos in Geometrie besteht und daß man diese zuvörderst in folgende zwey Theile zu spalten und die Titel derselben auf folgende Weise zu bestimmen habe:

Der Geometrie erster Theil.

Niedere Geometrie,

oder Wissenschaft von

geradlinigen und kreisförmigen

Expansionsgrößen.

Zweiter Theil.

Hoehere Geometrie,

oder Wissenschaft von

verschiedenartigen krummlinigen

Expansionsgrößen.

XVII.

Eintheilung

der

niederen Geometrie.

§ 115.

1) Die größte Zahl der Gegenstände dieses Theils der Geometrie besteht aus begränzten

Flächen und körperlichen Räumen. Diese aber sind Zusammenstellungen aus Linien und Winkeln oder aus Flächen und Winkeln, in welchen die Zusammenstellungsglieder dergestalt wechselseitig von einander abhängen, daß die Veränderung der Größe irgend eines dieser Glieder eine Größenveränderung eines oder mehrerer von den übrigen Zusammenstellungsgliedern zur nothwendigen Folge haben muß; sie sind also organische Zusammenstellungen und zwar aus Expansionsgrößen, mithin geometrische Größensysteme.

2) Aus dergleichen geometrischen Größensystemen nun lassen sich Größensysteme ableiten, die Gleichungen sind, welche die den ersteren Systemen zugehörenden Expansionsgrößen nach gewissen für diese angenommenen Einern als Quanta ausgedrückt in sich enthalten und von welchen Gleichungen iede das Gesetz der wechselseitigen Abhängigkeit zwischen den Expansionsgrößen des geometrischen Größensystems, welchem die Gleichung zugehört, dergestalt ausdrückt, daß man aus ihr die relative Quantität einer ieden von den Epansionsgrößen des geometrischen Größensystems ableiten kann, wenn man den übrigen Größen dieses Systems gewisse Werthe in der Gleichung beilegt.

Z. B. Errichtet man im Puncte B einer geraden Linie AB winkelrecht eine gerade Linie AC, so erhält man einen rechten Winkel. Setzt man die beiden Endpuncte B und C der Schenkel desselben durch eine gerade Linie BC in Verbindung, so entsteht ein rechtwinkeliches

Dreieck. Von diesem geometrischen Größensysteme hat Pythagoras gelehrt, daß, wenn die Seite AB z. E. a Zolle, die Seite AC ferner b Zolle enthält und die Anzahl der Zolle der Seite BC durch c bezeichnet wird, jedesmal die Zahl c eine solche seyn muß, die der Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ oder der Gleichung $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ ein Genüge leistet. Jede dieser Gleichungen ist also eine dem rechtwinkelichen Dreiecke entsprechende, welche das Gesetz der wechselseitigen Abhängigkeit, die zwischen den Seiten dieses Dreiecks Statt hat, ausdrückt.

3) Damit man aber in allen Fällen für geometrische Größensysteme Gleichungen aus diesen ableiten könne, die das Gesetz der quantitativen wechselseitigen Abhängigkeit der Elemente dieser Systeme auf die in vor. Nr. erwähnte Weise ausdrücken, so ist nothwendig, daß man in den Fällen, wo es nöthig wird, auch die in den Systemen vorkommenden Winkel mit als Elemente in die Gleichungen aufnehmen könne. Die Winkel aber und die Seiten geometrischer Figuren sind ungleichartige Größen und lassen daher keine Vergleichung unter einander zu, die doch bey der Ableitung einer Gleichung aus einer Figur und für dieselbe eine in den meisten Fällen nothwendige Bedingung ist. Damit nun diesem Hindernisse begegnet werde, so muß man mit einem bestimmten Kreishalbmesser aus den Scheiteln der Winkel Kreisbögen ziehen, welche sich nach den Lehren der Geometrie verhalten, wie die Winkel; mit diesen muß man nach bestimmten Regeln gerade Linien in Verbindung setzen und die

Längen dieser Linien muß man dann nach Theilen des Halbmessers der Bögen dergestalt berechnen, daß man für die Winkel und die zwischen ihre Schenkel gezogenen Kreisbögen von Grad zu Grad angeben kann, wie groß die mit den Kreisbögen nach gewissen Regeln in Verbindung gesetzten geraden Linien sind. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, von der Größe der Winkel und ihrer Kreisbögen auf die Größe der mit ihnen verbundenen geraden Linien, aber auch umgekehrt von der Größe dieser Linien auf die Größe der Winkel und Bögen, denen sie zugehören, zu schließen. Dergleichen Linien hat man trigonometrische und zwar deswegen genannt, weil man sich ihrer vornehmlich dazu bedient, aus den gegebenen Quantitäten solcher drey Elemente eines Dreiecks, von welchen die übrigen drey abhängig sind, die Quantität irgend eines dieser drey abhängigen Elemente durch eine Gleichung darzustellen und zu berechnen.

4) Die Berechnung solcher trigonometrischer Linien setzt aber schon die Erkenntniß mehrerer Lehren der Geometrie, wozu besonders auch der in vor. Nr. 2 angegebene Pythagoräische Lehrsatz gehört, voraus. Und dazu kommt ferner, daß zu der Anwendung dieser Linien für die Ableitung der zu geometrischen Größensystemen gehörenden Gleichungen die Erkenntniß der geometrischen Natur dieser Systeme, aus welcher ja diese Gleichungen abgeleitet werden müßen, nöthig ist.

Da nun dieses ist, so ist ohne Weiteres ganz offenbar, daß man die Lehren der nie-

dern Geometrie nothwendig in zwey Abschnitte einzutheilen und den Inhalt derselben auf folgende Weise zu bestimmen habe. — Dem ersten Abschnitte gehören alle dieienigen Lehren zu, die nicht selbst zu denen gehören, welche die Darstellung geometrischer Größensysteme in solchen Gleichungen, worin Winkel vorkommen, zum Gegenstande haben, sondern die den letzteren Lehren zum Grunde liegen und ihnen daher auch voraus geschickt werden müßen. Deswegen ist für die diesem ersten Abschnitte zugehörenden Lehren der niedern Geometrie der Titel Grundlehren einer der schicklichsten von den hier brauchbaren Titeln. — Dem zweiten Abschnitte der niedern Geometrie hingegen gehören alle dieienigen Lehren zu, die zu denen gehören, welche die Darstellung geometrischer Größensysteme in solchen Gleichungen, die Winkel enthalten, zum Gegenstande haben und die sich auf die Lehren des ersten Abschnittes gründen. Es sind demnach die Lehren dieses zweiten Abschnittes Derivativlehren.

Da sich aber auch von den durch das Wort Grundlehren bezeichneten Lehren des ersten Abschnitts die folgenden von diesen auf die ihnen vorausgehenden gründen, also auch unter diesen Grundlehren solche vorkommen, die selbst wieder Derivativlehren sind, so ist hiermit offenbar, daß für die Lehren des zweiten Abschnitts der niedern Geometrie der Titel Derivativlehren nicht bezeichnend genug ist, sondern daß dieser noch durch ein Beiwort näher bestimmt werden muß.

Diese Lehren aber haben nicht blos zum Gegenstande, geometrische Größensysteme in Gleichungen darzustellen, denn solche Darstellungen gehören auch den Lehren des ersten Abschnittes zu, wovon der diesem zugehörende Pythagoräische Lehrsatz als Beispiel dient, sondern sie haben zum Gegenstande, geometrische Größensysteme in solchen Gleichungen darzustellen, worin Winkel als Elemente derselben, oder vielmehr Linien, die für die Winkel berechtet sind, vorkommen. Da nun die Bestimmung der Größe der Winkel durch gewisse für sie berechnete gerade Linien Goniometrie heißt und hiernach solche Gleichungen, die Winkel und diesen zugehörende berechnete Linien als Elemente in sich enthalten, goniometrische genannt werden können, so ergiebt sich, daß die dem zweiten Abschnitte der niedern Geometrie zugehörenden Derivativlehren durch das Beiwort goniometrische gehörig bestimmt werden können.

§ 116.

Durch das im vorigen Sphen Beigebrachte ist zureichend auseinandergesetzt und begründet, daß die niedere Geometrie auf folgende Weise eingetheilt aufzustellen ist:

Der niedern Geometrie erster Abschnitt.

Grundlehren.

Zweiter Abschnitt.

Goniometrische Derivativlehren.

XVIII.

Eintheilung des ersten Abschnitts der niedern Geometrie.

§ 117.

Die Expansionsgrößen sind nach § 15 entweder Gränzen körperlicher Räume oder solche Räume selbst, weswegen der erste Abschnitt der niedern Geometrie nothwendig in zwey Hauptstücke gespalten werden muß. Die Gränzen körperlicher Räume aber sind entweder solche, denen gar keine Expansion zukommt und die Puncte heißen, oder sie sind expandirte Gränzen und zwar entweder Linien oder Flächen. Diesem zufolge muß der erste Abschnitt der niedern Geometrie auf folgende Weise eingetheilt werden:

Des ersten Abschnitts der niedern Geometrie erstes Hauptstück.

Von den

Graenzen

der geradlinig und kreisförmig expandirten körperlichen Räume, oder die

niedere Epipedometrie.

erstes Kapitel.

Von den unausgedehnten Gränzen oder den

Puncten

Zweites Kapitel.

Von den ausgedehnten Gränzen, bey welchen geradlinige und kreisförmige Expansion Statt hat, oder den

geraden Linien und den ebenen Flächen,

die entweder geradlinig oder kreisförmig begränzt sind.

Erste Kapitelabtheilung.

Von den

geraden Linien.

Zweite Kapitelabtheilung.

Von den

gradlinig und kreisförmig

begränzten

ebenen Flächen.

Des ersten Abschnitts der

niedern Geometrie

Zweites Hauptstück.

Von den

koerperlichen Räumen,

die geradlinig oder kreisförmig expandirt sind, selbst, oder

die

niedere Stereometrie.

Erstes Kapitel.

Die vorbereitenden Lehren, die

Lage

gerader Linien und Ebenen gegen Ebenen betreffend.

Zweites Kapitel.

Die vorbereiteten Lehren selbst.

Erste Kapitelabtheilung.

Von den durch ebene Flächen begränzten körperlichen Räumen.

Zweite Kapitelabtheilung.

Von den durch kreisförmig gebogene Flächen begränzten körperlichen Räumen oder den

Cylindern, Kegeln, Kugeln

und den Schnittstücken derselben.

§ 118.

Man pflegt gewöhnlich, ganz unlogisch, die niedere Geometrie in drey Theile, in die Lehre von den Linien oder Longimetrie, die Lehre von den ebenen Flächen oder Planimetrie und in die Lehre von den Körpern oder Stereometrie einzutheilen. Ferner betrachtet man gewöhnlich die Trigonometrie, die, wie hernach gezeigt werden wird, ein

Theil des in § 116 angegebenen zweiten Abschnittes der niedern Geometrie ist, als blossen Anhang der Geometrie!

XIX.

Eintheilung des zweiten Abschnitts der niedern Geometrie.

§ 119.

In §. 115, Nr. 3 ist angegeben worden, daß man erst durch die Berechnung der zu den Winkeln gehörenden trigonometrischen Linien in den Stand gesetzt wird, geometrische Größensysteme in goniometrischen Gleichungen auszudrücken.

Deswegen muß der zweite Abschnitt der niedern Geometrie zuvörderst in zwey Hauptstücke getheilt werden, von welchen das erste die Lehren von der Berechnung der vorgenannten Linien, die man eigentlich goniometrische nennen sollte, und das zweite die Lehren von den Anwendungen dieser Linien zur Bestimmung goniometrischer Gleichungen für geometrische Größensysteme enthält.

§ 120.

Die in dem letzt genannten Hauptstücke in Betrachtung zu nehmenden geometrischen Größensysteme sind die durch von einander abhängige Seiten und Winkel begränzten Flächen oder Figuren. Da aber die Flächen eben oder gebogen seyn können, so müßen diesem Hauptstücke zwey Kapitel gegeben werden, von welchen das erste die Bestimmung goniometrischer Gleichungen für ebene, das zweite aber eben diese Bestimmung für gebogene und zwar für kreisförmig gebogene Figuren zum Gegenstande hat.

§ 121.

Die ebenen Figuren ferner sind dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke und ferner solche, die von mehr, als vier, Seiten begränzt sind und durch den Begriff Vielecke oder Polygone zusammengefaßt werden.

Von den ebenen dreiseitigen Figuren pflegt man nur die geradlinigen in Betrachtung zu nehmen und giebt der Summe der Lehren, worin gezeigt wird, wie sich vermittelst der goniometrischen Linien (§ 119) für solche Dreiecke goniometrische Gleichungen oder Regeln finden lassen, nach welchen sich aus den bekannten Werthen dreier Bestimmungs-

stücke eines Dreiecks der von diesen abhängende unbekannte Werth irgend eines der übrigen Dreiecksstücke und die Größe der Flächenausdehnung des Dreiecks durch Rechnung finden läßt, den Titel ebene Trigonometrie. Unter den Vierecken nimmt man ebenfalls nur die geradlinigen in Betrachtung und betitelt die Summe der Lehren, worin gezeigt wird, wie sich aus fünf bekannten Bestimmungsstücken eines solchen Vierecks iedes der übrigen abhängigen unbekannten Stücke berechnen läßt, durch das Wort Tetragonometrie. Unter den Polygonen werden ebenfalls nur die geradlinigen in Betrachtung genommen und die Lehren von der Bestimmung und dem Gebrauche der diesen Polygonen zugehörenden goniometrischen Gleichungen wird Polygonometrie genannt.

Unter den Figuren, deren Flächen kreisförmig gebogen sind, nimmt man besonders nur die Dreiecke in Betrachtung, die man sphärische deswegen nennt, weil ihre Flächen als Theile der Oberfläche einer Kugel (Sphaera) zu betrachten sind. Die Summe der Lehren von der Bestimmung und dem Gebrauche der solchen Dreiecken zugehörenden goniometrischen Gleichungen nennt man sphärische Trigonometrie.

§ 122.

Dem Bisherigen zufolge muß der zweite Abschnitt der niedern Geometrie, welcher nach § 115 goniometrische Derivativlehren enthält, auf folgende Weise eingetheilt seyn:

Des zweiten Abschnitts der

niedern Geometrie

erstes Hauptstück.

Von den

goniometrischen Linien.

Zweites Hauptstück.

Von den

goniometrischen Gleichungen.

Erstes Kapitel.

Für die geradlinigen ebenen Figuren.

Erste Kapitelabtheilung.

Für geradlinige ebene Dreiecke;
ebene Trigonometrie.

Zweite Kapitelabtheilung.

Für geradlinige ebene Vierecke:
ebene Tetragonometrie.

Dritte Kapitelabtheilung.

Für geradlinige ebene Vielecke
ebene Polygonometrie.

Zweites Kapitel.

Für die kreisförmig gebogenen Figuren
und zwar die sphärische Dreiecke;
sphaerische Trigonometrie.

XX.

Eintheilung der hoehern Geometrie.

§ 123.

In § 16 ist bemerkt worden, daß die krummen Linien, gebogenen Flächen und die von solchen Linien und Flächen begränzten körperlichen Räume solche seyn können, bey welchen ein bestimmtes Gesetz des Krumm- und Gebogenseyns Statt hat, aber auch solche, bey welchen das Gegentheil hiervon Statt findet. Deswegen muß die höhere Geometrie in zwey Abschnitte eingetheilt werden, wie hier folgt:

Der höhern Geometrie erster Abschnitt.

Von solchen Expansionsgrößen, bey welchen gesetzmäßig krumme und gebogene Expansion Statt hat.

Zweiter Abschnitt.

Von solchen Expansionsgrößen, bey welchen ungesetzmäßig krumme und gebogene Expansion Statt hat.

§ 124.

Weil die Expansionsgrößen Gränzen körperlicher Räume oder körperliche Räume selbst sind, so muß der erste von den beiden vorerwähnten Abschnitten in zwey Hauptstücke auf folgende Weise getheilt werden:

Des ersten Abschnitts der höhern Geometrie erstes Hauptstück.

Von den Graenzen der körperlichen Räume, bey welchen gesetzmäßige krummlinige und gebogene Expansion Statt hat, oder die hoehere Epipedometrie für die eben genannten Räume.

Zweites Hauptstück.

Von den
koerperlichen Raeumen,
bey welchen gesetzmäßige krummlinige und gebogene Expansion Statt hat, oder die
hoehere Stereometrie
für die eben genannten Räume.

Auf ähnliche Weise müßte auch der in § 123 genannte zweite Abschnitt der höhern Geometrie in zwey Hauptstücke eingetheilt werden, wenn die Gegenstände dieses Abschnitts eine solche systematische und ausführliche Betrachtung zuließen, wie die des ersten Abschnittes, welches aber wegen der Ungesetzmäßigkeit ihrer Expansion nicht möglich ist.

§ 125.

Weil die Gränzen der körperlichen Räume Linien und Flächen sind, so muß das vorerwähnte erste Hauptstück im ersten Abschnitte der höhern Geometrie zuvörderst wieder in zwey Kapitel zerfallen, von welchen das erste die gesetzmäßig gekrümmten Linien und das zweite die gesetzmäßig gebogenen Flächen in Betrachtung zu nehmen hat.

§ 126.

Da ich in der weiteren streng systematischen Eintheilung der höheren Geometrie noch nicht mit mir selbst einig geworden bin, so breche ich hiermit ab und überlasse die letzte Arbeit in der Darstellung des Organismus der Mathematik einstweilen andern philosophisch gebildeten Mathematikern, die vielleicht iene Schwierigkeiten, die ich bis iezt nicht zu überwinden vermochte, leichter, als ich, zu beseitigen im Stande sind.

Druckfehler.

Seite 14	Linie 4	lies Theilpunct	statt	Theipunct
— 1.	— 4	— bestimmte	—	bestimmt
— 49	— 18	— erklärt	—	erkärt
— 51	— 11	— Seynsart	—	Seynsort
— 52	— 3	— eigenthümlichen	—	eigenthümliche.
— 53	— 13	— die	—	be
— 55	— 4	— näherungsweise	—	nährungsweise
— 78	— 12	— zu	—	zur
— 79	— 5	— Divisio	—	Division
— 80	— 10	— Theile	—	Theil
— 84	— 4	— schlechthin	—	schlechhin
— 85	— 16	— Groeße	—	Große
— 85	— 7	— als	—	daß
— 86	— 8	— zukommen	—	zu kommen
— 87	— 1	— gebildet	—	gedildet
— 90	— 10	— Combinationen	—	Combinatinen
— 91	— 1	— Bilden	—	bilden
— 92	— 2	— Quanta	—	Quante
— 93	— 8	— und	—	unb
— 96	— 7	— Zusammenhang	—	Zusamenhang
— 96	— 9	— qualitativ	—	qualitiv
— 100	— 16	— abhängigeGröße G.	—	abhängige G.
— 113	— 6	— welches	—	welchen
— 113	— 7	— worden	—	werden
— 124	— 1	— grundwesentlichen	—	Grundwesentlichen
— 130	— 5	— scientia	—	sciencia
— 134	— 7	— offenbar	—	offenbaar
— 143	— 6	— entstehen	—	entstheen
— 155	— 3	— auch die	—	die auch
— 161	— 6	— können	—	kön-
— 162	— 2	— übrigen	—	überigen
— 175	— 1	— genannte	—	genannten
— 183	— 9	— zugehörende	—	zu gehörende
— 192	— 13	— unabhängig	—	unabgängig.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rösling, Christian Lebrecht,

Der Mathematik Grundbegriffe, wahres Wesen und Organismus

Ulm 1823

Math.u. 171 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594241-2